www.e-rara.ch

Danielis Bernoulli ... Hydrodynamica, sive de viribus et motibus fluidorum commentarii

Bernoulli, Daniel

Argentorati, anno 1738

ETH-Bibliothek Zürich

Shelf Mark: Rar 5503

Persistent Link: https://doi.org/10.3931/e-rara-3911

www.e-rara.ch
Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d’imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L’éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l’imprimerie jusqu’au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

Nutzungsbedingungen Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

Terms of Use This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

Conditions d'utilisation Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

Condizioni di utilizzo Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

73175 (Rar)
Rar 5503

Legat
von Herrn
Prof. Dr. R. Wolf.

73
Ro

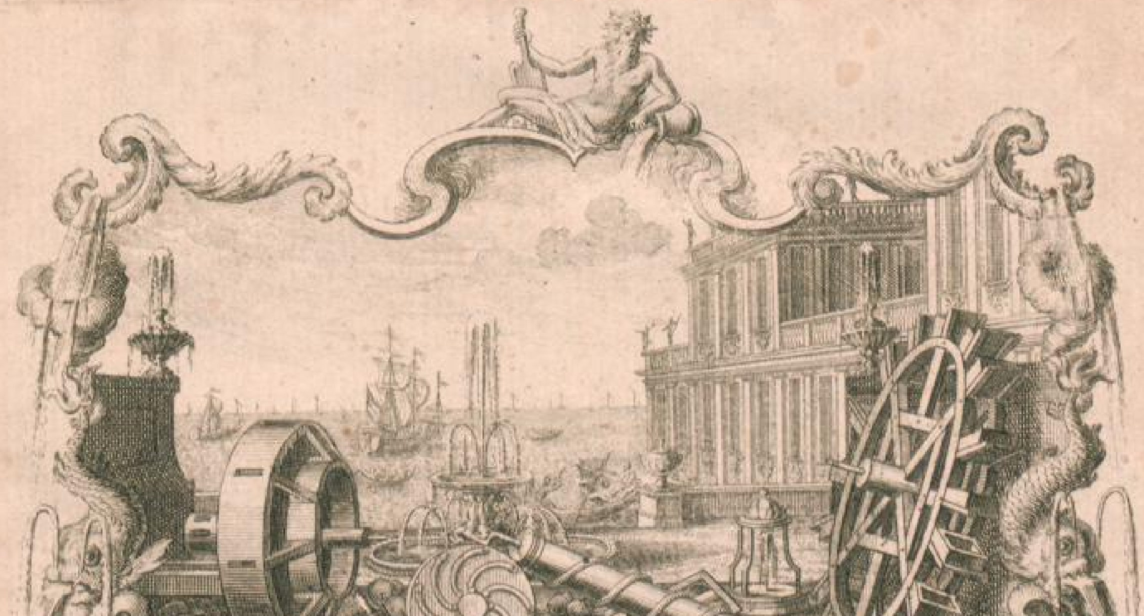
DANIELIS BERNOULLI Joh. Fil.
Med. Prof. Basil.
ACAD. SCIENT. IMPER. PETROPOLITANÆ, PRIUS MATHESEOS SUBLIMIORIS PROF. ORD. NUNC MEMBRI ET PROF. HONOR.

HYDRODYNAMICA,

SIVE DE VIRIBUS ET MOTIBUS FLUIDORUM COMMENTARII.

OPUS ACADEMICUM

AB AUCTORE, DUM PETROPOLI AGERET, CONGESTUM.



ARGENTORATI,
Sumptibus JOHANNIS REINHOLDI DULSECKERI,
Anno M D CC XXXVIII.

Typis Joh. Henr. Deckeri, Typographi Baſilienſis.

EIDGEN. POLYTECHN. SCHULE · BIBLIOTHEK · ZÜRICH

CELSISSIMO
ATQUE
SERENISSIMO
PRINCIPI ET DOMINO
DOMINO
ERNESTO
JOHANNI
DEI GRATIA IN LIVONIA
CURLANDIÆ
ET
SEM - GALLIÆ
DUCI.

CELSISSIME ATQUE SERENISSIME
PRINCEPS,
DOMINE GRATIOSISSIME.

NOn auſus fuiſſem Sereniſſimo Nomini Tuo *Hydrodynamicam* hanc inſcribere, niſi illa Academiæ Scientiarum, ſub umbone Tuo Petropoli florentis, conſilio & ſubſidiis a me conſcripta fuiſſet. Novimus quantum Tibi, Sereniſſime Princeps, Magnanime Academiæ Protector, poſt Auguſtam illam orbis borealis Palladem, debeamus, idque cum toto orbe literato, qui præclara ſibi porro ab Academia, amœnis benevolentiæ Tuæ radiis colluſtrata, pollicetur, pia & immortali recolemus memoria. Florebit in æternitatis ſacrario apud Ruſſicam gentem Tuorum in illam merito-

rum

rum magnitudo, apud Curlandos felicium, quæ divina illis providentia ſub Sceptro Tuo deſtinavit, fatorum memoria: apud univerſas denique gentes glorioſiſſimæ Tuæ vitæ perpetua admiratio. Quam cara ſit ſuperis Ruſſici Sceptri Majeſtas populique Tui felicitas, illuſtria temporum præſentium fata nos docent. Hi proſperos magnorum conſiliorum eventus; hi vitæ Tibi & Principatus diuturnitatem; hi ſucceſſores ex ſanguine Tuo, virtutum Tuarum æmulos, longa ſerie ad omnem temporum profunditatem, orbe univerſo plaudente, largiantur. Ita vovet

SERENISSIME & CELSISSIME PRINCEPS

DOMINE GRATIOSISSIME

Celſitudinis Tuæ

Scrib. Baſileæ
10. *Mart.* 1738.

Humillimus & Obſequioſiſſimus
Servus

DANIEL BERNOULLI.

PRÆFATIO.

PRodit tandem in publicum Hydrodynamica noſtra, ſuperatis omnibus, quæ impreſſionem ejus ab octo fere annis morata ſunt, obſtaculis; lucem fortaſſis haud aſpectura, ſi ad me ſolum omnis iſte labor pertinuiſſet. Præcipuas enim huius operis partes auſpiciis, conſiliis, ſubſidiisque Academiæ Scientiarum Petropolitanæ deberi lubens profiteor. Anſam libro dedit ipſum ejus inſtitutum, quo primi, qui ad eam formandam convenerunt, Profeſſores, de argumento quodam utili &, quantum fieri poſſet, novo Diatribam conſcribere tenebantur, certe admonebantur. Theoriam de viribus & motibus fluidorum, niſi invita Minerva fuerit ſuſcepta, argumentum eſſe nec inutile nec tritum, quisque facile largietur. Ut autem Lectoris tædium diſcuterem, rerum varietati inprimis operam dedi, præſertim in quinque poſteriorbus ſectionibus, atque ſpecimina inſerui analytica, phyſica, mechanica, cum theoretica tum practica, nonnulla geometrica, nautica, aſtronomica & alia, quorum tamen expoſitionem operis ſuſcepti ratio non tam ferre quam poſtulare viſa fuit. Quæ feſtinanti exciderunt ſphalmata, æquus harumque rerum intelligens Lector facile corriget. Unicus hujus ſcripti finis eſt, ut Academiæ inſervirem, cujus labores eo collimant, ut bonarum literarum incrementa & publica commoda promoveat.

INDEX

INDEX SECTIONUM.

SECTIO PRIMA.

Introitus eſt variaque continet prænotanda. pag. 1.

SECTIO SECUNDA.

Agit de fluidis ſtagnantibus eorundemque æquilibrio tum inter ſe tum ad alias potentias relato. 17.

SECTIO TERTIA.

De Velocitatibus fluidorum ex vaſe utcunque formáto per foramen qualecunque effluentium. 30.

SECTIO QUARTA.

De variis temporibus, quæ in effluxu aquarum deſiderari poſſunt. 61.

SECTIO QUINTA.

De motu aquarum ex vaſis conſtanter plenis. 90.

SECTIO SEXTA.

De fluidorum motu non effluentium ſeu intra latera vaſorum motorum, ubi præſertim de oſcillationibus fluidorum. 111.

SECTIO SEPTIMA.

De motu aquarum per vaſa ſubmerſa, ubi præſertim exemplis oſtenditur, quam inſigniter utile ſit principium conſervationis virium vivarum, vel iis in caſibus, quibus continué aliquid de illis perdi cenſendum eſt. 124.

SECTIO

SECTIO OCTAVA.

De motu fluidorum, cum homogeneorum, tum heterogeneorum, per vaſa irregularis & præruptæ ſtructuræ, ubi ex theoria virium vivarum, quarum pars continué abſorbeatur, explicantur præcipue phænomena ſingularia fluidorum per plurima foramina trajectorum, præmiſſis regulis generalibus pro motibus fluidorum ubique definiendis, 143.

SECTIO NONA.

De motu fluidorum, quæ non proprio pondere, ſed potentia aliena ejiciuntur, ubi potiſſimum de machinis hydraulicis earundemque ultimo, qui dari poteſt, perfectionis gradu, 163.

SECTIO DECIMA.

De affectionibus atque motibus fluidorum claſſicorum, præcipue aëris. 200.

SECTIO UNDECIMA.

De fluidis in vorticem actis, tum etiam de iis, quæ in vaſis motis continentur, 244.

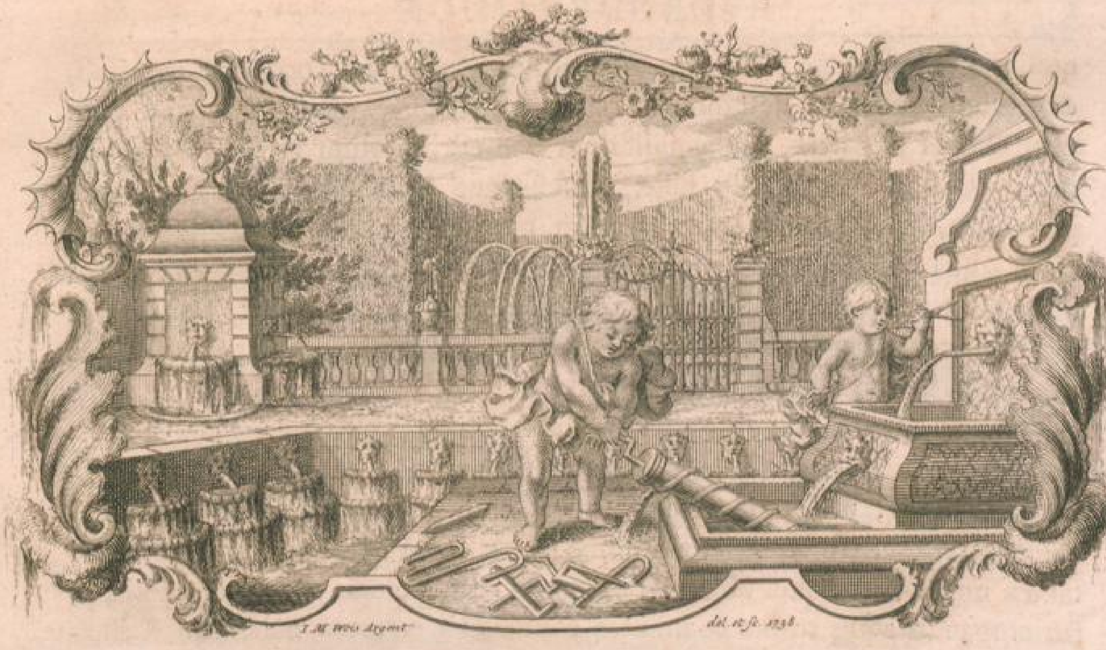
SECTIO DUODECIMA.

Novam ſtaticam fluidorum motorum, quæ hydraulico-ſtatica vocari poteſt, exhibet, 256.

SECTIO DECIMA TERTIA.

De reactione fluidorum ex vaſis effluentium, de menſura effectus, qui inde obtineri poteſt ad navigationem, ubi ſimul theoria nova pro fluidorum, poſtquàm effluxerunt, impetu in plana quibus occurrunt definiendo exhibetur, 278.

HYDRO-



HYDRODYNAMICÆ

SECTIO PRIMA.

Quæ introitus eſt, variaque continet prænotanda.

§. I.

Duplex cum ſit Theoria Fluidorum, quarum altera Hydroſtatica, liquorum ſtagnantium preſſiones & æquilibria varia, altera Hydraulica, fluidorum motum ſpectans, ſeorſum pertractari a ſcriptoribus conſueverunt, utramque vero tam arcto nexu inter ſe cohærere perciperem, ut altera alterius ope plurimum egeat, haud dubitavi eas confundere, quantum id ordo rerum poſtulare videbatur, ambaſque nomine communi & generaliori Hydrodynamicæ complecti. Quamvis autem ab antiquiſſimis temporibus fuerit continuo exculta Theoria fluidorum, incrementa tamen non admodum notabilia cepit; veterum quidem Mathematicorum cognitio eo terminabatur, quod æ-

 qui-

quilibrium commune fluidorum ſtagnantium, aut etiam corporum cum fluidis, quibus inſident, de quibus Archimedes ſcripſit, intelligebant; & cum præterea per ſe pateat, ubi æquilibrium non eſt, motum verſus partem minoris preſſionis fieri, varios luſus, machinaſque hydraulicas hinc excogitare potuerunt, partim oblectationi, partim publicis commodis egregie inſervientes, qua quidem in re peringenioſos ſe monſtrarunt; videbant etiam, ſed quaſi per tranſennam motus illos, qui preſſioni aëris debentur: Veras autem rationes accuratasque menſuras in Hydraulicis rebus plane ignorabant, atque ſic fere in limine ſubſiſtebant.

§. 2. Motui fluidorum determinando inſervit præcipue effluxus aquæ ex vaſe per foramen valde parvum: tametſi vero non omnino fugeret Frontinum alioſque, uti aliqui credunt, velocitatem aquarum ex vaſe vel caſtello effluentium creſcere ab aucta altitudine aquæ ſupra effluxus locum, negari tamen non poteſt, quin idem Frontinus in computandis aquarum modulis, ſeu erogandis aquis turpes & injuſtos commiſerit errores. Benedictus Caſtellius primus de nexu velocitates inter & altitudines cogitare, falſam autem legem ſuſpicatus eſt, putans, ambas eandem rationem ſequi. Poſt hunc demum Torricellius obſervavit, velocitates creſcere in ſubduplicatâ ratione altitudinum, quem ſecuti ſunt omnes; nec dum vero conveniebant de abſoluta velocitatis menſura, experimenta tamen inſtituerunt, qua iſtam menſuram definiri exiſtimarunt, inter quæ potiſſimum allegari ſolet illud, quod a Gulielmino ſumtum, octieſque repetitum fuit, quamvis id ab aliis experimentis ex illo tempore factis admodum recedat: ſolent autem omnia inter ſe differre, quæ ſub diverſis fiunt circumſtantiis, nec ſemper tutum eſt, uti ſuo loco dicemus pluribus, ex quantitate aquæ, definito tempore per definitum lumen effluentis, judicium ferre de ejuſdem velocitate. Sic cum ad calculum revocamus experimentum Gulielminianum, cujus modo mentionem fecimus, concludendum eſſet ex quantitate aquæ, quæ per lumen datum tempore dato effluxit, velocitatem ejus non majorem fuiſſe illa, quæ debetur quartæ parti altitudinis ſuperficiei aqueæ ſupra foramen. Et alia ſunt eodem Auctore experimenta, quæ recenſentur *Lib. 2. prop. 1. menſ. aquarum fluent*: vi quorum aqua effluens velocitate ſua aſcendere poſſit ad duas tertias iſtius altitudinis; Apud Mariottum alioſque extant, quæ pro dimidia altitudine faciunt; qua non obſtante velocitatum ita æſtimatarum diverſitate, mihi perſuadeo, vix a ſe invicem

vicem veras velocitates diſcrepaſſe, ratione habita ad altitudines aquæ & ubique tales proxime fuiſſe, quæ integræ altitudini debeantur : illa autem, quæ loco ultimo fuere citata, quæque pro dimidia altitudine prima fronte videntur ſtare, numero apud Authores plurima, movebant procul dubio Newtonum, Virum meritis ſuis immortalem , ut paulo confidentius loqueretur de Theoria , qua aquam per lumen minimum ex vaſe verticaliter ſurſum exilientem ad dimidiam altitudinem aquæ in vaſe ſtagnantis aſcendere poſſe invenerat, etſi aſſertum iſtud omnibus experimentis, quæ de his altitudinibus immediate ſumta fuere , contradicat : Theoriam expoſuit in *edit. prima princ. Math. phil. nat.* , eamque petiit ex preſſione, qua aqua præ foramine poſita moxque egreſſura ad motum cietur. Quoniam vero natura rei haud ſemper permittere videtur, ut *a priori* definiatur vis aquam ad effluxum animans, atque potius de ea vix aliter, quam ex phænomenis motus, id eſt, *a poſteriori*, quod ſæpe expertus ſum, judicare licet, ſuſpectum eſſe debet ratiocinium iſti principio innixum. Hinc etiam Vir modo laudatus ſententiam ſuam mutavit in ſecunda Operis ſui editione, rurſuſque aliquantum in tertia, affirmans aquam ad totam quidem altitudinem aſcendere, venam autem, quam efformat, præ foramine contrahi ſeu gracileſcere, atque ſic utrique phænomeno velocitatis quantitatisque dato tempore effluentis, quæ ſibi contradicere videbantur, ſatisfaciens. Quamvis autem contractionem iſtam fili aquei veram eſſe cauſam, ob quam velocitas aquæ effluentis non poſſit æſtimari ex quantitate, negandum non ſit, puto tamen, Theoriam ipſi non eſſe ſuperinſtruendam, quia *accidentalis* eſt , nec ſibimet ubique conſtans, dum velocitas non variat niſi a cauſis alienis veluti attritu, tenacitate aquæ, aliisque ſimilibus. Sic cum aqua non per ſimplex foramen, ſed per tubulum cylindricum effluit, vena notabiliter non contrahitur ſalva velocitate, excepto eo, quod propter attritum ei demitur: ſi quis autem hoc non obſtante putet, ex preſſione poſſe recte & tuto aquarum fluxum deduci, hunc rogarim, ut ad caſus magis compoſitos animum advertat, v. gr. ad fluxum aquæ, quem mirabilem vocat Mariottus, ex vaſe, quod diaphragma aliquod foramine perforatum in duas cavitates aqua implendas diſpeſcit, ſic ut aqua per duo foramina transfluere cogatur : de hoc motu loquitur Mariottus in tractatu ſuo egregio *de motu aquarum part. IV. pag. m.* 442.

§. 3. Hæc cum ita ſint, facile quiſque ſecum judicabit, quam parum ſpei ſuperſit, aliquando Leges motuum pro fluidis ad regulas Geometriæ puræ reductum iri, ſine ulla hypotheſi phyſica, cum vel in ipſo limine effugerint perſpicaciam Viri ingenio præpotentis & incomparabilis: neque ego credo poſſe ea, quæ in hoc opere expoſiturus ſum, omnem rigorem mathematicum ſubire: Principia Theoriæ phyſica ſunt & non ſine largitione acceptanda ut proxime vera; admiſſis autem principiis, omnia erunt Geometrica, & nullis obnoxia reſtrictionibus, neceſſario nexu inter ſe cohærebunt. Non poſſum tamen, quam bene ſentire de phyſicis iſtis poſitionibus, in quas forte incidi, quandoquidem me manuduxerunt ad plurimas novas proprietates, cum de æquilibrio tum de motu fluidorum detegendas, quæ, niſi me amor ſuſcepti laboris fallit, aliquando Hydrodynamicam inſigniter promovebunt, ſi magis excolantur, quam mihi licuit; ubi monuiſſe conveniet, quando multis, quicquid novum eſt, ſuſpectum eſſe ſolet, totam me Theoriam animo concepiſſe, tractatum conſcripſiſſe, pleraque cum amicis privatim communicaſſe, quædam etiam coram Societate noſtra prælegiſſe, priuſquam ullum experimentum inſtituerim, ne ex præconceptis menſuris opinione falſa, proxime tamen illis ſatisfaciente, me falli paterer, quandoque etiam Viros perſpicaciſſimos intellectis theorematis aperte faſſos eſſe, ſe ſibi talia perſuadere non poſſe, nec experimentis confirmatum iri exiſtimare; hisque omnibus geſtis, facta demum fuiſſe experimenta coram Amicis, hæcque ita conveniſſe cum Theoria, quantum ipſe vix ſperare poteram. Nunc vero redeamus illuc, unde divertimus.

§. 4. Poſtquam certi fuerunt Authores de diverſitate velocitatum a mutatis altitudinibus, vaſa conſiderare cœperunt magis compoſita, fiſtulis nempe varie inclinatis atque inæqualiter amplis inſtructa. Harum autem indolem jam ſuo tempore quodammodo cognovit Frontinus, non ignarus, modulum augeri a declivitate vel humilitate calicis, id eſt, fiſtulæ ſignatæ, quæ caſtello, aut aliquando etiam rivo induebatur: unde etiam calices ad lineam, uti loquitur, ordinari & in eadem altitudine poni juſſit. Et hoc quidem reſpectu injuſte poſtulatur Frontinus a quibusdam, velocitatis nullam habuiſſe rationem; ubi vero calculum ponit omnis aquæ acceptæ, illamque comparat cum eroganda, non video, quomodo excuſari poſſit. Experientia quoque edoctus fuerat, quod notari meretur, plus debito aquæ erogari per calicem legiti-

legitimæ tum menſuræ, tum poſitionis, cui ſtatim fiſtulæ amplioris moduli ſubjectæ ſint, quod ita eſſe, recteque a Fabretto indicatum fuiſſe, ſuo loco monſtrabo, quamvis Viri alias acutiſſimi, id non ſatis ſibi liquere vel potius de eo ſe dubitare, innuerint.

§. 5. Quod autem veteres obſcure & ſine veris menſuris viderunt, id demum Cl. Gulielminus in *Tract. de aquarum fluentium menſura* propoſitione accuratiori & generaliori complexus eſt tali, *eandem velocitatem*, inquiens, *eſſe aquæ fluentis per canalem inclinatum, ac ſi fluxerit e vaſe per lumen ſimile, & æquale ſectioni, tantundem a ſuperficie aquæ remotum, quantum ſectio ab Horizontali per initium alvei*, quam propoſitionem impugnavit Dionyſius Papinus, ipſe multum a veritate aberrans. Quoniam autem in eo ſumus, ut commenta, tum Hydroſtatica, tum Hydraulica præcipua recenſeamus, hoc loco etiam numerandum eſt illud, de preſſione fluidorum ex impetu cognoſcenda, nempe *vim fluidi, in planum ad angulum rectum irruentis data velocitate, æqualem eſſe ponderi cylindrici fluidi ſuper illo plano extructi, cujus altitudo talis ſit, ex qua mobile libere cadendo a quiete fluidi velocitatem acquirat.* Problematis hujus utiliſſimi ope æſtimare licet vim fluidorum machinas agitantium, aut, quale eſt ventus, naves propellentium, motus corporum in mediis reſiſtentibus plurimaque alia. De Hydroſtatica autem, quæ tubulis tenuiſſimis ſeu capillaribus particularis eſt, nihil dico, quia hactenus ad Leges generales omnibus fluidis communes reduci non potuit: Incertus præterea eſt Author, qui primus horum tubulorum indolem obſervaverit; conſtat tamen recentem eſſe obſervationem, quia de illa in libris ante hos 70. vel 80. annos editis nihil videre eſt.

§. 6. Authores præter citatos a Galilæi temporibus, in rebus aquariis celebriores ſunt Torricellius, Borellus, Vivianus, Paſcalius, Boilius, recentioris ætatis ſunt Varignonius, Newtonus, Polenus, Hermannus, Jacobus & Johannes Bernoulli, quorum inventa extant in *Comment. Acad. Reg. Sc. Pariſ. Princ. Math. phil. nat. tractatu de Caſtellis notiſque ad Frontinum*, *Phoronomia*, *Actis Lipſ.*, aliiſque operibus variis. Quæ vero circa curvaturas ex preſſione fluidi genitas aliaque hujusmodi inventa a Geometris exhibita fuerunt, quia facile ad Geometriam puram reducuntur, utut de reliquo omni laude digna ſilentio prætereo.

Expoſitis his, quæ ad alios pertinent, æquum eſſe ſentio, ut meorum quoque ratione ſubducta, dicam ſincere, an aliqua & quanta Hydrodynamicæ incre-

crementa ab illis ſperari poſſint aut debeant. Breviter igitur, quantum potero, momenta operis ſuſcepti indicabo.

§. 7. Exhibentur primo loco Theoremata præcipua, quæ ad æquilibrium fluidorum ſtagnantium pertinent: viſa mihi fuit inſtituti ratio id poſtulare, quamvis libenter fatear, nullas a me novas adjectas fuiſſe propoſitiones: Demonſtrandi quidem modus, quantum ſcio, mihi proprius eſt, ſed cum facile ſit, innumeras ſibi fingere demonſtrationes, parum eſt, hac quoque in parte, quod mihi arrogo. Phænomena præterea aliqua tubulorum capillarium obiter recenſentur, & denique occaſione preſſionis, quam fluida in latera vaſis exercent, Theoremata varia & nonnulla nova adduntur, circa figuram veſicarum liquore impletarum, circa earundem potentias ad onera elevanda, circa conſtructionem & firmitatem aquæductuum, aliaque affinia.

§. 8. Agitur poſtea de motu fluidorum ex vaſe effluentium, & cum omnes, qui hactenus de hac re egerunt, caſum unicum maxime obvium, quo foramen ratione amplitudinis vaſis internæ infinite parvum cenſetur, in Theoria ſua conſideraverint, noſtra non parum commendatur ſua latitudine; extendit enim ſe ad poſitionem foraminis cujuſcunque magnitudinis, imo & vaſis cujuscunque figuræ. Quamvis enim figuræ vaſis internæ conſideratio minime requiritur, cum foramen ut infinite parvum conſiderari poteſt, attamen ſine illa motus aquæ definiri nequit, cum eſt notabilis magnitudinis. Ex Theoria generali corollaria deducuntur, quæ motum aquarum variabilem ejusdemque affectiones egregie illuſtrant, confirmantque, quicquid aut experientia docuit, aut rei attributiones per ſe manifeſte indicant. Docet quidem Theoria, quando amplitudines internæ vel mediocriter ſuperant amplitudinem luminis, errorem eſſe inſenſibilem, qui ex conſideratione foraminis ut infinite parvi naſcitur, atque ſic noſtræ additiones nonnullis fortaſſe videbuntur ſatis inutiles. Hos vero, ſi modo qui futuri ſint, ſecum cogitare velim, præter quod non ſolum aquariis ſcribo, ſed & Geometris, qui veritatibus nudis etiam delectantur, uſum noſtrarum meditationum aliis in rebus maximum eſſe, quod magis intelligent, cum perpenderint, motum incipere a quiete, & per infinitos tranſire gradus, priuſquam certam celeritatem obtineat; maximas mutationes ſæpe quidem tam brevi fieri temporis momento, ut ſenſibus nullo plane modo percipi poſſint, determinandas tamen eſſe ad ſingula puncta, tum ut motus animo recte percipiatur, tum quia exinde varia deduci poſſunt Theoremata.

Ita

Ita animadverti, (quod exemplum ob rei momentum ſit inſtar omnium,) fieri non poſſe, ut preſſio aquæ, per canalem data velocitate fluentis, in ejusdem latera definiatur, niſi mutationes iſtæ, quas *momentaneas* dicam, utcunque ſenſibus inperceptibiles recte animo intelligantur. De his ego, ut primus cogitavi, ita optatiſſimo cum ſucceſſu novam Theoriæ aquarum partem addidi, quæ, quia fluidorum tum motum tum preſſionem ſimul reſpicit, *hydraulico - ſtatica* aptiſſime vocari viſa fuit. Poſt hæc Theoriæ generalis ſpecimina, de vaſis cylindricis tam ſimplicibus, quam iis, quæ tubis inſtructa ſunt, exhibentur, & in his poſterioribus præſertim determinantur mutationes, quæ ab initio fluxus oriuntur, dum datus velocitatis gradus attingitur, & id quidem in hypotheſi vaſorum ampliſſimorum; notandum autem eſt, has mutationes ſenſibiles admodum eſſe, etiamſi vaſa ſunt infinitæ amplitudinis, poſſeque illas experimentis demonſtrari, dum aquæ ex vaſe ampliſſimo per foramen ſimplex effluentes primo ſtatim temporis puncto totam, quantam poſſunt, velocitatem habent. Pendent prædictæ mutationes tum a longitudine tum a figura tubi. Denique etiam calculi analytici pro varii generis temporibus inveniendis una cum annotationibus phyſicis eo pertinentibus adjiciuntur. Indicante denique Theoria, fieri non poſſe, ut aquæ multum ultra ſupremam ſcaturiginis ſuperficiem aſcendant, monſtratur ſub fine ſectionis, non pertinere ad hypotheſes noſtras phænomenon ſingulare, quod ipſe ſæpius obſervavi, & pro lubitu imitari poſſum, cujusque mentio injicitur in *Hiſt. Reg. Acad. Sc. Pariſ. ad ann.* 1702. ubi dicitur, accidere quandoque, ut aquæ in fontibus ſalientibus aſſurgant ad altitudinem triplam, aut quadruplam ejus, quæ reſpondet aquæ ſuperficiei ſupremæ, mox tamen enormem aquæ jactum ad conſuetam altitudinem deprimi, poſteaque genuina iſtius phænomeni ratio cum veris menſuris ex Theoria noſtra petitis affertur, modusque indicatur ſaltum inſolitum producendi, imo & ad lubitum augendi.

§. 9. Porro Theoria extenditur ad examen motuum ex vaſis conſtanter plenis, quibus nempe tantum aquæ continue affunditur, quantum ex illis effluit: horum indoles in eo potiſſimum conſiſtit, ut fluida emanantia magis magisque accedant ad illum velocitatis gradum, qui toti altitudini ſuperficiei fluidi ſupra foramen debetur, eum vero nunquam omnino attingant, niſi poſt tempus infinitum: vergere tamen demonſtrantur aquæ tam cito ad velocitatem iſtam, ut poſt tempusculum inſenſibile tantum non totam acquirant, niſi

cum

cum per longiſſimos rivos aut aquæductus feruntur, magnoque lumine ejiciuntur; tunc enim accelerationes tam celeres non ſunt, quin percipi poſſint, quod ſingulari exemplo ex Cl. Mariotti libro *de motu aquarum* deſumto confirmatur. Quoniam vero motus a quiete incipit & perpetuo creſcit, formulæ dantur, quarum ope vel ex fluxus tempore vel ex quantitate aquarum ejectarum velocitas ſingulis temporis punctis definiri poſſit & viciſſim.

§. 10. In ſequentibus fluida conſiderantur, quæ intra vaſa moventur, ubi præſertim motus fluidorum reciproci ſeu oſcillatorii ad menſuras revocantur, earumque affectiones indicantur. Dedit autem Newtonus Theorema ſimile pro oſcillationibus fluidi, in tubo uniformis amplitudinis (cujus crura duo extrema verticalia, intermedia pars horizontalis) oſcillantis, quod Theorema Pater meus in *Comm. Acad. Imp. Sc. Petrop. tom.* 2. *p.* 201. generalius reddidit poſita inclinatione qualicunque crurum extremorum verſus horizontem. Noſtra Theoria totam rem ſine ulla reſtrictione complectitur, tubos conſiderans in ſingulis locis directione ſeu poſitione atque amplitudine pro lubitu variabiles: oſtenditur dein, quibus in caſibus fiat, ut oſcillationes diverſæ excurſionis ſint Iſochronæ, quibus ſtantibus longitudo penduli ſimplicis Iſochroni generaliſſime determinatur. Sed & præter hoc oſcillationum genus in ſubſequente ſectione quædam aliæ examini ſubjiciuntur, veluti illæ, quæ fiunt in tubis aquæ infinitæ vel etiam terminatæ immerſis, in quibus ſingulari circumſpectione opus eſt, qua adhibita omnia phænomena calculo ad amuſſim reſpondent, eadem vero neglecta tantus fit inter ea diſſenſus, quantus eſt inter leges motus, quæ pro corporibus perfecte elaſticis, iisque quæ pro mollibus valent.

§. 11. Poſt hæc ad alia magis compoſita progredior, motum nempe fluidorum conſiderans ſive homogeneorum ſive heterogeneorum, quæ per unum aut plura foramina transfluere coguntur, priuſquam ejiciantur in aërem, ubi regula illa communiter recepta de ſaltu aquæ ad ſupremam aquæ libellam vehementer fallit, ceſſantibus etiam legibus preſſionis ordinariis. Horum autem omnium apud Authores ne veſtigium quidem reperitur, niſi quod Mariottus habet, loco ſupra citato *part. IV. p. m.* 442. *de motu aquar.* ubi quidem fluxum aquarum retardari, fuiſſe ſe experientia edoctum, teſtatur, ſimul autem manifeſtat, quam procul abfuerit a vera horum motuum Theoria, & videtur ſane hæc Theoria omnium fere principiorum, adhuc in rebus ſimilibus adhiberi ſolitorum, vim eludere, ita ut nihil ſit, quod noſtrorum præſtantiam magis confirmet:

firmet: de eorum veritate enim experimenta inſtituta me amplius dubitare non ſinunt. Non deeſt autem hiſce meditatis ſua utilitas, quandoquidem magni momenti eſſe poſſint in perficiendis machinis hydraulicis.

§. 12. Sequuntur commentationes de machinis hydraulicis, quibus potisſimum monſtratur, certum quendam perfectionis terminum eſſe, ultra quem ire non liceat; defectus autem ab ultimo hoc perfectionis gradu in multis machinis maxime receptis calculo numerico ſubjiciuntur, additis regulis ſeu præceptis, ad quæ in conſtruendis novis machinamentis animus ſit advertendus: exempli loco affertur notiſſima per totum orbem machina Marlyenſis, de qua monſtratur, ſi modo deſcriptionibus fidendum ſit, quod non ultra quinquageſimam ſextam prope partem ſuppeditet ejus aquæ quantitatis, quam cæteris paribus machina perfectiſſima theoretice ſubminiſtrare queat. Speciale etiam examen inſtituitur de machina ab antiquiſſimis temporibus ad noſtram uſque ætatem uſitatiſſima, Cochlea nimirum Archimedis, attentione Geometrarum non indigna, tam ratione eorum, quæ ad Geometriam puram, quam quæ ad Hydraulicam pertinent.

§. 13. Succedunt ſpecimina quædam de motu fluidorum elaſticorum, veluti aëris & pulveris pyrii accenſi, præmisſis iis, quæ ad naturam horum fluidorum pertinent; quæ vero ipſe non aliter, quam ut hypotheſes phyſicas conſidero, de quibus nihil confidenter affirmabo. Propoſitiones & Problemata hujus ſectionis nova ſunt, & eo ſelecta animo, ut multis quæſtionibus phyſicis illuſtrandis, aut etiam ſolvendis occaſionem præbere posſint. Adjiciuntur quædam de æſtimatione virium vivarum fluidis elaſticis inſitarum, quæ aliquando fortaſſe in praxi mechanica nonnullius uſus erunt: monſtratur enim, unius v. gr. libræ pulveris pyrii accenſi effectum in elevandis ponderibus majorem eſſe poſſe, quam vel centum homines robuſtisſimi labore continuo intra unius diei ſpatium efficere posſint.

§. 14. Agitur porro de fluidorum motu circulari, ut & de fluidis, quæ in vaſis motis ſtagnant; variaque alia intermiſcentur. Quæ autem de motu circulari proferuntur, inſervire quodammodo poſſunt ad phænomena gravitatis per vortices explicanda; cætera valeant, quantum poterunt.

§. 15. Præmiſſa Theoria motuum, rurſus ad æquilibria fluidorum deſcenditur, ſed fluidorum motorum, quorum leges exhibitæ nondum fuerunt. Mirum eſt, cum alias motus ex presſione definiatur, hic inverſa methodo preſ-

ſionem ex motu peti, prius ex circumſtantiis definiendo; nec crediderim aliam viam tuto iniri poſſe præter eam, quam ego ſecutus ſum: conſideravi autem canalem, per quem aquæ fluunt eo in loco eoque temporis puncto, quæ quæſtioni conveniunt, amputatum; poſteaque per regulas noſtras præmiſſas accelerationem indagavi particulæ aquæ imminentis, proximeque effluxuræ. Ex iſta acceleratione colligere licebat compresſionem illius particulæ aqueæ, quæ compresſio per naturam fluidorum æqualis eſt presſioni in latera canalis. Cognita hac presſione apparet, quid fieri debeat, ſi canalis eodem in loco perforatus fuerit, tubulusque foramini reſpondeat; fore nempe, ut aqua in eo aſcendat ad certum uſque gradum ſtagnans in tubulo, & ab aqua inferius per canalem præterfluente ſuſtenta, ſic, ut hic æquilibrium adſit inter aquas fluentes & ſtagnantes: hoc vero nomine Theoriam iſtam *hydraulico-ſtaticam* commode vocari poſſe exiſtimavi. Notari porro meretur, ipſam hanc Theoriam fundamentum rurſus eſſe & fontem aliorum motuum antehac incognitorum. Theoremata, quæ exponuntur, non nova ſolum, ſed & pleraque inexpectata ſunt, quorum omnium veritatem nec ipſe plane mihi perſuadere potui, priusquam experimenta inſtituiſſem, quæ mihi omnem ſcrupulum demebant. Habent autem inſignem uſum, quandoquidem iis innititur vera presſionis aquarum, per aquæductus ſeu rivos fluentium, æſtimatio, hincque deducendæ tuborum firmitates requiſitæ. Inde quoque pendent accuratæ menſuræ aquarum per modulos, rivo lateraliter inſertos, erogatarum: in Phyſiologia rectius jam intelligentur, quæ pertinent ad motum humorum in corpore animali, & quæ ſunt alia.

§. 16. Denique progredior ad alios quosdam modos, quibus aqua niſum facere poteſt, explicandos: ita nempe aqua, dum per foramen effluit, in contrarium premit vas non aliter, atque globus retropellit tormentum, ex quo exploditur: iſtius retropulſionis plures proprietates deteguntur novæ, quæ presſionum naturam egregie illuſtrant, earumque leges, quas affectant, generales in mechanicis rem iſtam ſerio meditantibus indicabunt. Has diſquiſitiones feci, quia mihi viſum eſt, poſſe ea novæ aliquando navigationi ſine remorum, aut venti adminiculo excogitandæ occaſionem præbere; qua de re ſuo loco pauca quædam afferam, etſi non ignoro, omnium hujusmodi rerum primordia per ſe pleriſque videri ridicula. Tandem etiam de vi aquarum ex impulſu hincque nato renixu, quam corpora in fluidis mota offendunt, Theoremata quædam adjiciuntur.

§. 17.

§. 17. Et hæc quidem ſunt, quæ mihi ex admiſſis principiis geometricam deductionem pati viſa ſunt. Quoniam vero nihil eſt in Theoria tam rigoroſe demonſtratum, quod non in applicatione ad corpora reſtrictionem aliquam poſtulet, ideo facile apparet, nec ullam Theoriam de fluidis expectandam eſſe, quæ omnibus menſuris experientia cognitis pleniſſime ſatisfaciat; cujus rei memores eſſe velim, qui Theoremata noſtra experimentis confirmare voluerint. Ubique invenient quidem aliquem conſenſum, ſed non perfectum, eumque modo ſtrictiorem, modo laxiorem, pro rerum circumſtantiis. Quoties autem ipſe aliquod experimentum effeci, ante omnia mecum perpendi, quousque principia Theoriæ cum caſu propoſito congruerent; atque ſic me nunquam aut rariſſime eventus fefellit. Non ſolum enim prævidere ſolebam, in quam partem futura eſſet differentia, ſi quæ notabilis eſſe debebat, ſed & quanta; quod ipſum, ſi recte judico, ſatis manifeſtat, fluida affectare quidem leges, quas ipſis præſcriptas eſſe ponimus, obſtacula autem ubique offendere nunc majora, nunc minora. Cæterum experimenta inſtitui non pauca, quorum ſingula in fine ſectionis, ad quam pertinent, locavi: præſertim vero ſollicitus fui, in propoſitionibus antea incognitis & plerisque ſat paradoxis confirmandis. De experimentorum fide non eſt, quod quis dubitet, cum præcipua coram Amicis eaque poſt publicatam Theoriam fecerim; magnam tamen experimentorum, quæ animo concepi, partem, quando per ſingula ire non licet, aliis relinquens inſtituendam. Perlectis noſtris propoſitionibus quisque ſibi finget innumera, neque proin opus eſſe judicavi, omnia, qualia ſunt a me deſiderata, exponere; expoſui tamen aliqua.

§. 18. Jam vero tandem principiorum, quorum toties mentionem fecimus, ratio reddenda eſt. Præcipuum eſt *conſervatio virium vivarum*, ſeu, ut ego loquor, *æqualitas inter deſcenſum actualem aſcenſumque potentialem*: Utar hac poſteriore voce, quia idem quod altera ſignificat, ſortem autem apud nonnullos Philoſophos, qui vel ad ſolum *vis vivæ* nomen moventur, magis benignam fortaſſe experietur. Puto, hic e re noſtra fore, hac de re paulo copioſius dicere.

§. 19. Poſtquam Galilæus docuiſſet, corpus, ſive verticaliter, ſive ſuper plano utcunque incurvato, deſcendens eandem velocitatem acquirere, modo altitudo lapſus ſit eadem, quod ex natura preſſionum demonſtrari poteſt, Hugenius eadem hac propoſitione, ſed generaliori pro hypotheſi feliciter uſus

eſt in eruendis legibus motuum corporum elaſticorum ex percuſſione, nec non in ſtabiliendo centro oſcillationis penduli compoſiti; protulit autem axioma hoc ſuum talibus verbis: *Si pondera quotlibet vi gravitatis ſuæ moveri incipiant utcunque, ſingulaque rurſus ad quietem ſponte reducantur, centrum gravitatis ex ipſis compoſitæ ad priſtinam altitudinem rediturum eſſe*, ubi per vocem *utcunque* intelligit, *ſive ſe percutiant inter deſcenſum, ſive premant, aliove modo in ſe invicem agant corpora.* Ex iſto axiomate ſtatim ſequitur principium conſervationis *virium vivarum*, quod ipſe etiam Hugenius demonſtravit, & quo aſſumitur: *Si pondera quotlibet vi gravitatis ſuæ moveri incipiant utcunque, ſingulorum velocitates ubique tales fore, ut producta, ex earum quadratis in ſuas maſſas collecta, ſint proportionalia altitudini verticali, per quam centrum gravitatis ex corporibus compoſitæ deſcendit, multiplicatæ per maſſas omnium.* Mirum eſt, quantam habeat hæc hypotheſis in Philoſophia mechanica utilitatem, quod, ſi quis alius, ſane Pater meus recte animadvertit, qui id ſparſim, imprimis autem in *Diſſertatione Pariſiis edita de legibus motuum & in Tom. 2. Comment. Acad. Imp. Sc. Petrop.* oſtendit, idemque eſt, quod pro inveſtigandis Legibus motuum, ex propria gravitate ortorum, in fluidis adhibui; poſui enim velocitates particularum conſtanter tales eſſe, ut, ſingulis verticaliter ſurſum motis ad ſtatum quietis usque, centrum earum gravitatis commune ad priſtinam altitudinem aſcendat: malui autem ob rationem ſupra dictam hanc hypotheſin verbis Hugenianis quam Paternis accommodare, eamque nomine *æqualitatis inter deſcenſum actualem aſcenſumque potentialem* inſignire, quam altero *conſervationis virium vivarum*, quod etiamnum aliqui, præſertim in Anglia, neſcio quo fato, faſtidiunt. Mihi quidem in tota doctrina Leibnitiana de *viribus vivis* nihil eſſe videtur, de quo non omnes, ſuo tamen quivis loquendi modo, conveniant, quod, ni fallor, clare oſtendi in *Comm. Acad. Sc. Imp. Petrop. Tom. I. p.* 131. *& ſeq.* quem locum hic allegare volui, ne quis Lectorum ſe verbis offendi patiatur, ſciatque nihil a me accipi, quod in Mechanica receptum non ſit ab omnibus, & quod non neceſſario nexu cohæreat cum eo, quod jam Galilæus poſuit, cum ſtatueret, incrementa velocitatum proportionem ſequi compoſitam ex preſſionibus & momentis temporum.

§. 20. De cætero quamvis principium prædictum univerſale ſit, non tamen eſt ſine circumſpectione adhibendum, quia ſæpe contingit, ut motus tranſeat in materiam alienam. Ita verbi gratia poſitio illius valet pro regulis motuum ex percuſſione eruendis, ſi modo corpora ſint perfecte elaſtica;

ſed

ſed cum talia non ſunt, facile eſt videre, partem *virium vivarum* ſive *aſcenſus potentialis* in compreſſionem corporum impenſam corporibus non reſtitui, ſed materiæ cuidam ſubtili, ad quam tranſiit, impreſſam hærere: ſi tamen res recte conſideretur, quum ratio cognoſcitur, quæ eſt inter partem corporibus reſiduam, eamque quæ ad materiam ſubtilem tranſiit; apparebit, facile occurri poſſe iſti incommodo, ſicque recte definiri leges motuum pro corporibus mollibus. Simile quid ſuccedit in motu aquarum computando, ubi quandoque manifeſtum eſt, partem *aſcenſus potentialis* continue perdi; cujus utique rei in ſubducendo calculo ratio habenda eſt: ad quod probe attento multa de aquarum fluxu Theoremata nova mihi contigit detegere, quæ videre eſt in Sect. Sext. & Sept. & de quibus nondum video, an ulla alia methodo demonſtrari nedum excogitari poſſint.

§. 21. Sic igitur non incautus principio noſtro uſus ſum, hocque modo non ſolum de motu aquarum, ſed & de earum preſſione, quod mirum videri poteſt, multa antea incognita ſe offerunt, quæ nondum inſtituta Analyſi nemo facile præviderit nec expectarit. Quum vero fit, ut *aſcenſus potentialis* nec omnis conſervari poſſit ex rei natura, nec præviderí, quanta pars abſorbeatur, non ſatis accurate motus fluidorum determinari poteſt, nec puto, ulla alia methodo poſſe. Igitur Lectorem cautum eſſe velim in corollariis ex Theoria noſtra deducendis, quæ ſæpe propter mutatas circumſtantias non accurate cum experimentis convenire poterunt.

§. 22. Ex præmemoratis jam ſatis liquet, ex noſtra methodo requiri, ut ſingularum particularum fluidi definiatur velocitas ex aſſumta velocitate, quæ eſt aliquo in loco, veluti in loco effluxus. Neceſſe proin fuit, aliam ſuperaddere hypotheſin, quæ hæc eſt: poſtquam ſcilicet mente concepimus diviſum fluidum in ſtrata, ad directionem motus perpendicularia, ponemus fluidi particulas ejusdem ſtrati eadem velocitate moveri, ita, ut ubique velocitas fluidi reciproce proportionalis ſit amplitudini vaſis reſpondenti. Uſitata eſt hæc hypotheſis, quamvis cæterum notum ſit, fluidum ad latera vaſis paullo tardius, in medio autem velocius moveri, quod ab attritu fit, aliasque etiam exceptiones ſubinde eſſe faciendas; error tamen notabilis ab hujusmodi defectibus rariſſime poteſt oriri.

§. 23. Finiam hæcce de hypotheſibus noſtris præmonita recenſione phænomenorum, quæ conſervationem *virium vivarum* in motu fluidorum ali-

quantum & illuſtrare & confirmare poterunt : eorum quidem in ipſo opere plurima occurrent, quæ autem ob calculum, quem poſtulant, non allegabo. Triviale autem & obvium eſt, quod de gutta, in aquam ſtagnantem delapſa, obſervatur: orbes nempe excitat in ſuperficie aquæ ſtagnantis, horumque eo plures, quo vel major fuerit gutta, vel altius delapſa , nec dubium eſt, quin iſti orbes ſine fine ſe propagaturi eſſent , niſi tenacitas fluidi , aliaque ſimilia obſtaculo eſſent. Quandoque etiam alium effectum ab hujusmodi ſtillis obſervare licet ; dum plures guttulæ minores a ſuperficie aquæ inferioris in altum projiciuntur, tuncque conſtanter apparet, quod præſertim huc pertinet, eo altius aſſurgere guttulas, quo pauciores numero atque minores volumine fuerint, & cum altitudo lapſus eſſet duorum pedum, ſæpius guttulæ minores ultra altitudinem lapſus aſcendebant, ſtillante præſertim aqua per foramen magnum. Hic notatu quoque dignum eſt illud, quod de particula aquæ per canalem tenuem, eumque v. gr. horizontalem, atque in ea extremitate, verſus quam aqua fluit, operculo perforato opertum obſervatur. Scilicet eo temporis puncto, quo aqua ad operculum usque pervenit, magno impetu paucæ guttulæ exiliunt, moxque omnis aquæ motus ſiſtitur; facile autem quis ſuſpicari poſſet, aquam foramini imminentem ſua velocitate moveri pergere, reliquam ſiſti, id vero conſervationi *virium vivarum* minime reſponderet; reſpondet autem egregie vehemens iſte aquæ effluxus *momentaneus*, vel quaſi exploſio: de his alibi plura.

§. 24. Hæc ſunt, quæ de hypotheſibus noſtris, earumque tum præſtantia tum defectu volui in anteceſſum monere. Supereſt ut quædam dicam de indole fluidorum, quippe circa quæ lucubrationes noſtræ verſabuntur, non quod eam me aliis magis perſpectam habere putem, ſed quod nefas exiſtimem, a more hoc ſcriptoribus omnibus ſolenni recedere. Et primo quidem hoc omnes convenire ſolent, motum fluidis quibusvis ineſſe inteſtinum, ſine quo nemo profecto tantam fluiditatem, efferveſcentias diverſorum fluidorum, diſſolutiones ſolidorum fluidis ſubmerſorum, evaporationes, aliaque phænomena infinita recte aſſequetur ; hinc pleræque res ſolidiſſimæ a ſufficiente calore, qui omnia in motum rapit, liqueſcunt: facit autem motus iſte inteſtinus, ut particulæ ſibi non ſint contiguæ, ſed quaſi volitent, quo fit, ut ſine trictione a minimo impulſu loco cedant, quod minime ſuccederet, poſitis iisdem particulis inter ſe, ſicut in acervo arenæ, contiguis. Ita facile intellectu

lectu eſt, pollinem ex putaminibus ovorum in patella igni ſuperimpoſitum lac bulliens, quod dicitur, mentiri. Quo intenſior autem eſt calor, eo vehementior utique eſt motus particularum, hæque majori intervallo a ſe invicem diſperſæ; quod convenit cum dilatatione omnium fluidorum ab aucto calore, eorundemque contractione ex frigore, cui legi ipſa etiam aqua nondum congelata ſubjicitur: quod autem, dum congelatur, contrariæ ſit indolis, id ex alia cauſa, fortuito ſuperveniente, deducendum videtur, nempe ex eo, quod aqua in interſtitiis ſuis particulas foveat aëreas, quæ ſic volumen aquæ non augent, prouti ſaccharum in aqua ſolutum non auget ejusdem volumen; quod tempore inſtantis congelationis particularum aquearum motus minuatur; quod ſic eædem particulæ magis ad ſe invicem accedant, adeoque ex interſtitiis ſuis particulas aëreas pellant, quæ alibi minus commode locatæ volumen augere poſſunt, prouti ſaccharum nondum ſolutum volumen auget aquæ, cui permiſtum eſt. Hinc commode ratio deducitur, cur glacies aquæ ab aëre ante congelationem bene purgatæ non ſpecifice levior, quin potius gravior fiat. Egregia autem experimenta circa ſolutionem veram aëris in aqua ad punctum ſaturationis usque inſtituit Mariottus, eaque in Tractatu ſuo *de motu aquarum* recenſuit. Suſpicioni igitur locus eſt, fluida (ut dixi) congelari, cum ceſſat vel valde diminuitur motus inteſtinus, tum enim particulæ in ſe invicem collabuntur, fiuntque contiguæ, ſimulque ex interſtitiis particulas heterogeneas, ſi quæ ibi commorentur, expellunt; nec tamen clarius hinc intelligitur durities corporum congelatorum, quinimo videtur, ceſſante iſto motu corpus mediæ naturæ inter fluidum & ſolidum, niſi aliud quid accedat, fieri, & comparandum cum acervo arenæ: quid autem id rei ſit, ne conjectura quidem aſſequor, licebit interim fingere quaslibet particulas ad ſe gravitare, vel, ut voce Anglis uſitata utar, ſe invicem attrahere, attractionemque inſigniter creſcere, accedentibus ad ſe invicem particulis; diverſæ eſſe virtutis in diverſis corporibus, minoris v. g. in oleis quam in aquis, quarum glacies durior eſt; fluida citius & facilius congelari, quorum particulæ vel fortius ſe attrahunt vel motu lentiori agitantur. Exinde conjicere liceret, aquam ſaccharo vel ſale imprægnatam tardius congelari, quod particulæ ſacchari vel ſalis, particulis aqueis interpoſitæ, harum attractionem diminuant, neque hæ conjungi poſſint, ſiccidumque congelari, quin particulæ heterogeneæ loco pellantur: & certe omnibus in fluidis, quæ

quæ particulis heterogeneis ſunt imprægnata, tempore congelationis fit quædam partium ex poris expulſio, ſeu ſecretio atque præcipitatio. Infinita ſunt alia corporum tum ſolidorum tum fluidorum phænomena, quæ mire admodum cum principio mutuæ gravitationis conveniunt, ita, ut dolendum ſit, principium ipſum tam alte ſupra mentem humanam poſitum eſſe, ut neminem eſſe putem, qui id ullo modo intelligere poſſit.

§. 25. Denique hic monuiſſe conveniet, tractatum hunc ut Phyſicum potius quam Mathematicum mihi conſiderari, nec proin conſultum me duxiſſe, methodum Geometricam in hypotheſibus, definitionibus cæterisque apparatibus præmittendis nimium affectare, & ubique ordinem ſermonemque Geometrarum ſequi, qui ſolent ab ovo ordiri, propoſitionibus complecti, & eo ordine omnia pertractare, ut ex primis præmiſſis ſingula rite deducantur, nihilque indemonſtratum poſt ſe relinquant, quamvis id a tot aliis jam demonſtratum fuerit. Non mihi hæc cura fuit ratione eorum, quæ ab aliis tradita ſunt, ſive definitiones fuerint & axiomata, ſive etiam theoremata, non omiſi tamen demonſtrationes eorum, quæ nova ſunt, imo etiam in prima ſectione apponuntur demonſtrationes Theorematum, ab aliis paſſim demonſtratorum; & cum quidam occurrant termini, ab aliis non explicati nec uſitati, horum definitiones in ipſo textu exhibebo. Cætera modo ſub forma Propoſitionum, Theorematum, Problematum, Corollariorum, Scholiorumque pro more Geometrarum proponam, modo etiam ſermone continuo explicata dabo.

Unum ſupereſt, de quo Lectorem præmonitum potiſſimum volo: non potuiſſe me huic operi eam adhibere ſive diligentiam ſive attentionem, quam debuiſſem, & quam ipſe deſideravi. Nullus adeoque dubito, quin nonnulli irrepſerint errores, dum calculos ponerem, quos, ſpero, nemo ſiniſtre explicabit: aliquos, qui in oculos incurrerunt, dum tractatum leviter relegerem, ipſe correxi; alios tamen etiamnum ſupereſſe mihi perſuadeo.

HYDRO-

HYDRODYNAMICÆ
SECTIO SECUNDA,
Quæ agit de fluidis ſtagnantibus eorundemque æquilibrio tum inter ſe, tum ad alias potentias relato.

Theorema I.

§. I.

SUperficies fluidi ſtagnantis horizonti eſt parallela.

Demonſtratio.

Contineat vas ABCD (Fig. 1.) fluidum EBCF, cujus ſuperficies EGF, ſi fieri poſſit, horizonti non ſit parallela: conſideretur guttula in loco eminentiori *a*, quæ gravitate ſua verticaliter deorſum ſollicitatur vi repræſentata per *a c*, reſolvatur hæc vis in duas collaterales *a d* & *a b* alteram perpendicularem ad ſuperficiem, alteram quæ tangat illam: Cum autem nihil adſit, quod huic vi poſteriori reſiſtat, hæc non poteſt non effectum ſuum exerere, ipſamque adeo guttulam verſus E trahere, quod eſſet contra hypotheſin ſtagnationis, ſeu ſtatus permanentis: Igitur neceſſe eſt, ut vis tangentialis *a b* ubique nulla ſit, quod non aliter contingit, quam cum ſuperficies tota horizonti eſt parallela. Q. E. D. Fig. 1.

Corollarium.

§. 2. Hinc intelligitur veritas propoſitionis generalis, quod nempe ſuperficies fluidi, cujus partes viribus quibuscunque ſollicitantur, ſe ita ſemper componat, ut quælibet guttula, in ſuperficie poſita, trahatur ſub directione, ad ſuperficiem perpendiculari.

Theorema 2.

§. 3. Fluidum homogeneum, duobus tubis communicantibus utcunque formatis incluſum, ad æquilibrium eſt compoſitum, quando ambæ ſuperficies ad libellam poſitæ ſunt, id eſt, æqualem à puncto vaſis infimo diſtantiam verticalem ſervant.

Demonſtratio.

Fig. 2. Sit fluidum vaſi ABC, (Fig. 2.) ex duobus cruribus ſeu tubis communicantibus compoſito incluſum, ponaturque in utroque crure ad eandem altitudinem poſitum: dico non poſſe ſitum hunc mutari, quin corpus aliquod grave ex ſitu inferiori in altiorem ſe recipiat, quod eſſet contra naturam gravium; Nam ſi ſuperficies E deſcendat in *e*, & ab altera parte D ex D elevetur in *d*, quoniam pars vaſis reliqua eodem fluido ante & poſt ſitum mutatum plenum eſt, omnis mutationis effectus in hoc ſitus eſt, quod particula E*e* aſcenderit in D*d*.

Cæterum idem quoque liquet ex Theorêmate primo, quandoquidem in aqua ſtagnante tubus utcunque formatus fingi poteſt, in quo utique aqua ſitum ſervabit, quem antea habuit, cum perinde ſit, ſive aqua tubo incluſa, coërceatur lateribus tubi, ſive circumſtagnante aqua.

Scholium 1.

§. 4. Si in demonſtratione prima præcedentis paragraphi tota maſſa DBE ſitum ſuum commutaſſe concipiatur cum ſitu *d*B*e*, facile demonſtratur centrum gravitatis totius maſſæ in ſitum altiorem aſcendiſſe, quod non minus abſurdum eſt: Quoniam autem in noſtra demonſtratione nulla eſt particula in E*e*, quæ non aſcenderit poſt mutatum ſitum, exiſtimavi ſtrictiorem & clariorem fore demonſtrationem, ſi centri gravitatis nulla conſideratio habeatur.

Scholium 2.

§. 5. De tubis capillaribus phænomena habemus ſingularia; aqua

aqua enim aſcendit ſupra libellam in tubo ſtrictiori, cujus altera extremitas aquæ ſubmergitur; Mercurius vero libellam non attingit. Hæc vero cum aliquando attente perpenderem, in eandem præter propter incidi cauſam, quam olim Patruus meus Jacobus Bernoulli, beate defunctus dederat in tractatu ſuo *de gravitate ætheris*, nempe aquam in tubo ſtrictiori ideo ultra libellam aſcendere; quod numerus particularum aëreo-æthereatum in baſi columnæ, quæ aquæ in tubo ſupereminet, minor ſit numero particularum in ſimili baſi extra tubum; hoc vero intelligitur ex eo, quod poſitis juxta ſe globulis in tabula horizontali, ſi circino cirulus fiat, globulorum aliquot neceſſario excludantur, quia dividi nequeunt: Sunt vero preſſiones columnarum aëreo-ætherearum (quarum baſis altera eſt in tubo, altera extra tubum) ut baſes, id eſt, ut numeri globulorum in baſibus: unde ſi numerus globulorum in prima baſi ſit $= a$, in altera $= a+b$, preſſio columnæ prioris $= g$, erit preſſio alterius columnæ $= \frac{a+b}{a}g$, hinc differentia preſſionum $= \frac{b}{a}g$, cui æquari debet altitudo aquæ ſupra libellam. Hæc ut rectius intelligantur, conſiderandum erit eſſe g proportionalem quadrato diametri, quæ reſpondet ſuperficiei fluidi tubo incluſi, & eidem quadrato ob extremam globulorum parvitatem proportionalem quoque eſſe a, ſic ut ratio g ad a cenſenda ſit conſtans, atque proin altitudo aquæ ſupra libellam proportionem ſequi debeat ipſius b; eſt vero, quod per ſe patet, b ut peripheria ſuperficiei fluidi tubo incluſi, erit igitur altitudo ſupra libellam, ut eadem illa peripheria, id quod experientia jam diu confirmavit. Si porro nunc diverſa conſideremus fluida, videbimus eo tortuoſiorem atque proin majorem eſſe præmemoratam peripheriam, quo majores ſunt fluidi particulæ, & cum à magnitudine hujus peripheriæ pendeat altitudo fluidi ſupra libellam, percipimus, cur hæc altitudo in eodem tubo non ſequatur rationem gravitatis ſpecificæ inverſam: ita ſi idem tubulus immergatur ſpiritui vini & aquæ, ille minus aſcendit, quam hæc, cum tamen ob minorem ſuam gravitatem ſpiritus aſcendere deberet magis; hoc vero indicat, ſi recte rem aſſecutus ſum, minores eſſe particulas ſpiritus vini, quam aquæ: Nunquam tamen meo judicio aſcenſus ſupra libellam in ullo fluido mutari poteſt in deſcenſum, & omnia fluida ejusdem eſſe hac in re indolis, crediderim, niſi alia quædam cauſa, nondum hactenus conſiderata, ſupervcniat,

niat, & ſi ex noſtra hypotheſi argumentamur, dicendum erit, Mercurium quoque ſupra libellam fuiſſe aſcenſurum, ſi modo particulæ ejus non majori vi ſe invicem attraherent, quam particulæ aquæ; huic enim attractioni omnia tribuo, quæ Mercurium in diverſa ire faciunt. Experimenta, quæ ad hanc ſententiam me manuduxerunt, apponam in fine hujus ſectionis.

Lemma.

Fig. 3. §. 6. Sit tubus cylindricus ABDC (Fig. 3.) utcunque verſus horizontem inclinatus, cujus fundum CD ad latera tubi ſit perpendiculare, plenusque intelligatur aquâ usque in AB; dico preſſionem omnis aquæ in fundum CD eſſe æqualem ponderi cylindri aquei, cujus baſis eſt CD, & cujus altitudo eſt verticalis DE, terminata ab horizontali BE.

Demonſtratio.

Cum forma tubi ſit cylindrica, & fundum inſuper ad latera tubi perpendiculare, quilibet videt, quod actio fluidi in fundum eadem ſit, quam haberet cylindrus ſolidus ejusdem ponderis ſuper plano inclinato, conſtat autem ex mechanicis, preſſionem cylindri ſolidi in fundum eam eſſe, quæ in propoſitione definitur, ergo & talis erit actio fluidi, ſi modo non reſpiciatur adhæſio fluidi in lateribus tubi, ejusdemque indoles ratione tubulorum capillarium, à quibus animum abſtrahimus. Q. E. D.

Theorema 3.

Fig. 4. §. 7. Sit jam generaliter vas utcunque formatum AHMB (Fig. 4.) & aqua repletum usque in DE, erit preſſio aquæ in ſingulas vaſis particulas, veluti in G aut H, ſemper æqualis ponderi cylindri aquei, cujus baſis eſt ſuperficies illius particulæ, & cujus altitudo æqualis eſt diſtantiæ verticali ejusdem particulæ à ſuperficie aquea.

Demonſtratio.

Primo concipiatur in G tubulus cylindricus CG perpendiculariter vaſi inſiſtens, productaque ED, intelligatur hic tubus ſimili liquore plenus

plenus usque in C. Si nunc fingatur vas perforatum in G; erit utrumque fluidum in æquilibrio (per §. 3.) tantum ergo premit fluidum tubuli C G verſus interiora, quantum premit fluidum vaſis verſus exteriora. Sed prior preſſio convenit propoſitioni (per §. 6.) ergo & altera.

II. Si vero loco puncti G ſumatur aliud H tale, ut linea, quæ eo in loco vaſi perpendiculariter inſiſtit, cadat intra vas; tunc poteſt vas integrum concipi R H S O N, priori unitum in H, & aqua repletum usque in P O. Sic enim apparet, ſi particula H, quæ utrique vaſi communis eſt, perforetur, fluida ſic fore in æquilibrio (§. 3.) adeoque utriusque preſſionem in H eſſe æqualem. Preſſio autem fluidi in R S N ea eſt, quæ indicatur in propoſitione (per partem primam hujus demonſtrationis) ergo & preſſio fluidi, quod eſt in vaſe A M B. Q. E. D.

Scholion.

§. 8. Ex his propoſitionibus facile deducuntur æquilibria fluidorum ſtagnantium in caſibus magis compoſitis. Nolo autem omnia proſequi, neque enim inſtituti noſtri ratio id poſtulat, contentus demonſtrationibus, quas modo dedi, propoſitionum *fundamentalium* in hydroſtatica. Quod vero attinet ad preſſiones fluidorum non ſtagnantium, ſunt certe hæ altioris indaginis. Nec dum à quoquam recte determinata fuit preſſio fluidorum, par canales ſeu tubos dato velocitatis gradu fluentium, quamvis id argumenti genus tam in rebus aquariis, quam multis aliis ſit utiliſſimum. De his vero prius agere non licet, quam de motu fluidorum commentati ſimus.

§. 9. Patet ex præcedentibus ratio potentiarum veſicularium, quibus ingentia pondera ſuperari poſſunt: Inde etiam noſcitur vis, quam ſuſtinent latera tubi, in quo aquæ ſtagnant; quod argumentum, quoniam pertractari ſolet ab hydroſtaticæ ſcriptoribus, nunc percurremus, præſertim cum multa alia eo innitantur, de quibus nobis dicendum erit.

Sit Primo veſica *onmp*, (Fig. 5.) pavimento & ponderi B interpoſita, in Fig. 5.
quam aqua infundatur per tubum FR*o*, cujus crus verticale FR brevitatis gratia incomparabiliter longius ponemus, quam diametrum veſicæ: Non elevabitur ſtatim pondus B; Atſi aqua porro infundatur usque v. gr. in F, demum

demum attolletur pondus; erit autem æquilibrium, cum locus contactus *c d* ſe habet ad orificium *o*, ut pondus B ad pondus cylindri aquei altitudinis FR ſuper baſi *o* inſiſtentis. Pendet itaque abſoluta elevationis determinatio à ſtructura veſicæ, quæ ſi exempli gratia compoſita fuerit ex filamentis perfecte flexibilibus, extenſionemque nullam admittentibus, ſimulque figuram naturalem habuerit Sphæricam, facile apparet, fore ſpatia contactus *cnd* & *gpe* æqualia & corrugata, partemque reliquam expanſam, habituram eſſe formam Zonæ ſphæricæ; Atque hinc per Geometriam deducitur quantitas elevationis *np*, quæ nulla erit, quamdiu circulus maximus veſicæ minorem habuerit rationem ad orificium *o* illa, quæ eſt inter pondus B & pondus præfati cylindri aquei, nec prius tota explicabitur veſica quam altitudo fuerit infinita, id eſt, nunquam. Si vero fibræ alius ſunt indolis, aliter ſe res habet, quod multi non ſatis conſiderarunt, quibus de figura veſicæ inflatæ ſermo fuit, eamque cavernulis muſcularibus in œconomia animali applicare voluerunt, quâ de re nunc paullo fuſius agam.

Fig. 6. §. 10. Fuerit veſica DC (Fig. 6.) eidemque appenſum pondus P, ſimulque alligata tubulo DA, cujus rurſus longitudinem compendii ergo in comparabiliter majorem longitudine DC fingemus. His poſitis facile quidem quivis perſpicit, repletis veſica & tubulo fore, ut illa intumeſcat, pondusque appenſum P elevet: nemo autem intelliget ſtatum æquilibrii, figuramque ventricoſam, niſi plane intelligatur ſtructura veſicæ ejusdemque fibrarum, quæ cum ita ſint, caſus aliquot ſingulares examinabimus, qui frequentius occurrere poſſunt.

Caſus I.

§. 11. Si veſica compoſita fuerit ex fibris longitudinalibus D*p*C, D*m*C &c. inſtar meridianorum in punctis D & C, ceu Polis concurrentibus æqualibus, perfecte flexibilibus & uniformibus, quarum ſingulæ inter ſe proximæ minimis connectantur fibrillis transverſalibus, hisque ita laxis, ut minima vel quaſi nulla vi ſufficientem extenſionem admittant. Sic quælibet fibra D*p*C incurvabitur in figuram elaſticæ, totaque veſica formam aſſumet ſolidi, quod generatur ex revolutione iſtius curvæ circa axem DC. Si porro altitudo AD eſt infinita, fit elaſtica D*p*C rectangula & tunc eſt graſſities maxima veſicæ ad longitudinem axis DC ut 25 ad 11 præter propter

pter atque longitudo arcus D*p*C eſt ad eundem axem proxime ut 5 ad 2, ita ut maxima elevatione ponderis veſica tribus quintis partibus decurtetur.

Caſus II.

§. 12. Si poſitis cæteris, ut antea, minima filamenta transverſalia *n o*, *m p*, &c. quæ ſunt perpendiculares ad fibras longitudinales, extenſioni reſiſtant, apparet non poſſe figuram fibræ D*o p* C determinari, quin duo potentiarum genera unicuique puncto applicata conſiderentur, quorum alterum curvæ perpendiculariter inſiſtit, & filum extrorſum premit, alterum ad axem curvæ DC, eſt perpendiculare & introrſum trahit: facile etiam intelligitur infinitas poſſe harum preſſionum excogitari leges, ut ad curvam quamvis datam fibra D*op*C ſe componat, atque adeo etiam v. gr. ad circularem, quæ figura à plerisque Phyſiologis tribuitur fibrillis, quæ pertinent ad machinulas muſculares. Sed eſt alius etiam modus, quo fibra longitudinalis D*o p*C acquirere poteſt figuram arcus circularis, nempe cum omnino abſunt fibrillæ transverſales *np*, *mp*, &c. Sic enim dum inflatur veſica, hiatus fit inter duas fibras longitudinales proximas D*op*C & D*nm* C, per quem fluidum erumpit, ſimul autem, cum non ſatis cito effluere poſſit, fibras extendit, easque ad figuram circularem componit: atque hoc in caſu maxima veſicæ decurtatio, quæ in priori caſu fuit $\frac{2}{5}$ totius longitudinis veſicæ non inflatæ, nunc tantum eſt proxime $\frac{4}{11}$.

§. 13. Sequitur ex hiſcè, difficile eſſe, ut figura veſicæ inflatæ, cui pondus appenſum eſt, recte determinetur, quandoquidem nemo ſit, qui indolem minimarum fibrillarum perfecte cognoſcere poſſit: tranſcribam tamen huc exempla quædam, quæ maxime videntur probabilia, ex ſchedis meis ſine demonſtratione, quam ſi quis deſideret, reperiet in *tom.* 3. *Comm. Acad. Sc. Petrop.* Ante omnia autem æquationem dabo ad curvam, quæ ex duobus potentiarum generibus, ut dixi in præcedente paragrapho, iisque quamcunque legem obſervantibus formatur.

§. 14. Sit igitur filum AEG (Fig. 7.) duobus punctis A & G affixum; Fig. 7.
ducatur recta AG: ſintque duo puncta in filo infinite propinqua D & E, ex quibus agantur ad AG perpendiculares DB & EC; lineola autem DF ſit lineæ AG parallela. Intelligatur ſingulis punctis D vel E applicatas eſſe duas po-

potentias utcunque variabiles, quarum altera ſit ubique ad curvam, altera ad A G perpendicularis: priorem ponemus in puncto D æqualem A, in puncto E æqualem $A+dA$, alteram in puncto $D=C$, in puncto $E=C+dC$: Sit porro $AB=x$, $BD=y$, $AD=s$, $BC=dx$, $FE=dy$, $DE=ds$, quod elementum curvæ conſtantis magnitudinis ponatur; Radius Oſculi in puncto $D=R$, in puncto $E=R+dR$. Dico æquationem ad curvam fore hanc $-AdR - RdA = (RdCdx + 2Cdyds + CdxdR) ds$, vel poſito $CRddx$ pro $Cdyds$ (eſt enim $R = \frac{dyds}{ddx}$) habebitur $-AdR - RdA = (RdCdx + CRdds + Cdyds + CdxdR) : ds$, ſive $\frac{-ARds - RCdx}{ds} = \int Cdy$.

§. 15. Intelligitur ex præcedente æquatione, quod cum potentiæ, quæ ſunt ad curvam perpendiculares, ſolæ agunt, fiat $AR =$ conſtanti quantitati, quia nempe ſic fit $C = o$: tunc igitur radius oſculi ubique ſequitur rationem inverſam potentiæ reſpondentis. At ſi potentiæ ad axem perpendiculares ſolæ adſunt, tunc evaneſcente littera A fit $-\frac{RCdx}{ds} = \int Cdy$. Poteſt autem hæc æquatio integrari & ad hanc reduci formam $RCdx^2 =$ conſtanti quantitati; ex qua apparet potentiam ductam in radium oſculi ubique eſſe in ratione reciproca quadrati ſinus, quem applicata facit cum curva. Similiter æquatio canonica integrationem admittit, cum potentiæ, quæ ad axem perpendiculares ſunt, omnes inter ſe ſunt æquales ſeu proportionales elemento curvæ ds. Ita enim poſito $dC = o$, obtinetur $-AdR - RDA = 2ndyds + ndxdR$, intelligendo per n conſtantem quantitatem, qua æquatione recte tractata fit $nydy + mmdy - nsds = ds\int Adx$, ubi m conſtans eſt ab integratione proveniens.

Si præterea potentiæ ad curvam normales ponantur applicatis y proportionales, poterit ulterius reduci poſtrema æquatio ad hanc

$$-dx = \left(2ff - \frac{gyy}{b}\right) dy : \sqrt{(2ny + 2mm)^2 - \left(2ff - \frac{gyy}{b}\right)^2},$$

cujus conſtantes f & m caſibus particularibus erunt applicandæ, dum n & g pendent à relatione potentiarum in puncto aliquo: unde ſi $g = o$, oritur catenaria, & ſi $n = o$ prodit elaſtica: generaliter vero inſervit æquatio ad curvaturam lintei uniformiter gravis, cui fluidum ſuperincumbit, determinandam: Caſus

ſus ſimpliciſſimus hujus rei eſt, cum ſupponitur $f=m=o$, tunc enim fit $-dx=\frac{-gy\,dy}{\sqrt{(4nnbb-ggyy)}}$ ſeu facta integratione cum additione debitæ conſtantis, $x=-\sqrt{\left(\frac{4nnbb}{gg}-yy\right)}+\frac{2nb}{g}$, quæ eſt æquatio ad ſemicirculum, ad quem nempe ſe linteum accommodabit in ſequenti hypotheſi: Sit filum lintei gravis AEG (Fig. 8.) in ſemicirculum incurvatum, cujus diameter AG Fig. 8. ad libellam poſita ſit; ſuperincumbat filo fluidum usque ad AG, dico ſi fluidi pondus ſit æquale ponderi fili, fore ut filum perfecte flexile & uniformis craſſitiei figuram ſemicircularem conſervet. Quomodo autem pondera fili & fluidi, ut æqualia fiant, efficiendum ſit ex elementis Geometriæ conſtat. Denique ſi ſtatuatur tam potentias A quam C eſſe ubique applicatæ reſpondenti y proportionales (quæ hypotheſis ſane maxime convenire videtur cum vera figura veſicæ in figura ſexta) poterit rurſus æquatio canonica, quæ continet differentialia tertii Ordinis, reduci ad æquationem ſimpliciter differentialem eamque per quadraturas facile conſtruendam. Sit nempe $A=my$ & $C=ny$, dico naturam curvæ ADG in fig. 7. exprimi hâc æquatione

$$dx=(g^3+\tfrac{1}{2}myy)\,dy:\sqrt{[(f^3+\tfrac{1}{2}nyy)^2-(g^3+\tfrac{1}{2}myy)^2]}$$

in qua literæ conſtantis magnitudinis f & g rurſus ab integrationibus prodierunt: fit autem valor literæ n negativus, cum æquatio ad veſicæ inflatæ figuram determinandam adhibetur.

§. 16. Nolui his nimis inſiſtere, quod non proxime pertinent ad Hydrodynamicam: Nihil etiam addo de fluidis elaſticis, quia horum theoriam ſeorſim tradere conſtitui; attamen quod ad preſſiones fluidorum elaſticorum attinet, poterunt illæ ex natura fluidorum ſimpliciter gravium ſupra expoſita facile deduci & demonſtrari, fingendo fluidum elaſticitate eſſe deſtitutum, cylindrumque fluidi ſimilis altitudinis infinitæ vel quaſi infinitæ ſuperimcumbere; hæc autem quomodo intelligenda ſint ſuo loco dicemus: Nunc quidem pergo ad id, quod in rebus aquariis potiſſimum quæri ſolet, quanta nempe debeat eſſe firmitas canalium, ut preſſioni aquæ reſiſtere poſſint, ubi præſertim conſiderantur canales, qui aquas ad fontes vehunt, de quibus ego quoque pauca monebo.

§. 17. Probe diſtinguendæ ſunt preſſiones aquarum in canalibus ſtag-

nantium à preſſionibus fluentium, quamvis id nemo adhuc animadverterit, quod ſciam; hinc eſt, quod regulæ à variis exhibitæ valeant tantum pro aquis ſtagnantibus, tametſi verbis utantur, quæ perinde eas pertinere ad aquas fluentes perſuadere poſſint. Ut vero diſcrimen utriusque Theoriæ appareat in ipſo limine, exemplum quoddam afferam, cujus demonſtratio ex
Fig. 9. inferioribus patebit. Sit loco caſtelli vas ampliſſimum ABCD (Fig. 9.) aqua repletum usque in EF, & in parte inferiori tubulo cylindrico horizontali MO*mo* inſtructum, per quem aquæ ſine impedimento transfluere poſſe intelligantur; ducatur verticalis NG terminata ab horizontali EH. His ita præparatis, dico ſi orificium O*o* totum digito obſtruatur, punctum N prêmi extrorſum ſecundum totam altitudinem NG; ſi dimidium orificium obturetur, hanc preſſionem quarta ſui parte diminui, & ſi denique remoto digito aquæ liberrime effluant, omnem preſſionem evaneſcere, ſic ut totum cum parte aut etiam cum nihilo confundi ab Authoribus ſoleat. Sed demonſtrabo poſſe preſſionem vel negativam fieri, atque ita in ſuctionem mutari. Quoniam vero id agere non poſſum priusquam integram theoriam de aquis fluentibus præmiſerim, nunc aquas conſiderabo ſaltem ſtagnantes, veluti ſi orificium O*o* totum fuerit obſtructum.

§. 18. Conſtat autem ex Mechanicis latera tubi MO*mo* (cujus diametrum incomparabiliter cenſebimus minorem altitudine NG) non aliter ten-
Fig. 10. di, quam ſi explicata eſſent in figuram rectangularem MO*mo* (Fig. 10.) appenſumque haberent pondus P, quod ſit æquale ponderi prismatis aquei, cujus tria latera ſint 1°. radius tubuli, 2°. longitudo ejusdem & 3°. altitudo aquæ ſupra tubum; Ex hac propoſitione intelligitur nonſolum ratio tenſionum, ſi diverſæ fuerint altitudines aquæ aut diametri tuborum, ſed & ipſa tenſionum menſura: Quod ſi proin firmitas tuborum major ſit iſta tenſione, nullum erit rupturæ periculum; ſi ſecus certo rumpetur tubus. Cæterum de firmitate tuborum experimenta inſtituta fuerunt à variis; ſunt autem ejusmodi experimenta difficilia & ſumtuoſa; poterit igitur facilius firmitas tuborum ſive plumbeorum ſive ferreorum cognoſci, ſi experimento innoteſcat, quantum pondus filum plumbeum aut ferreum datæ craſſitiei ſuſtinere poſſit ſine rupturæ periculo. Experimentum ſimile à me inſtitutum apponam in fine ſectionis oſtenſurus quomodo inde firmitas tubi datæ craſſitiei & diametri deduci poſſit.

Sequun-

Sequuntur Experimenta quæ ad Sectionem pertinent Secundam.

Ad §. 5.

De *tubulis capillaribus*: Experimenta innumera de horum tubulorum indole à variis ſumta fuerunt, quos inter eminet Georgius Bernhardus Bulffingerus, qui non ſolum præcipua collegit, ſed & plurima de ſuis addidit, vid. *Comm. Acad. ſc. Petrop. tom. 2. pag. 233. & ſeqq.*

I. Ut oculis recte appareret, quam contrariæ ſint Indolis hâc in parte mercurius & reliqua fluida, confici curavi vas vitreum A B C (Fig. 11.) ex duobus cruribus verticalibus compoſitum, quorum alterum A B diametrum habebat trium linearum vel quatuor, alterum B C vix tertiæ partis lineæ. Cum vas liquore quocunque implebatur, ſuperficies altius erat in crure ſtrictiore quam ampliore, veluti in D & G, mercurius autem ſolus depreſſior eſt in ſtrictiore quam ampliore, veluti in F & G. Fig. 11.

II. Oſtenſurus mercurium non aliam ob rationem à natura aliorum fluidorum recedere, quam ob fortiorem particularum ſuarum mutuam attractionem cogitavi de his experimentis: tubulum nempe gracilem mercurio ſuctione implevi eumque horizontaliter poſitum ſenſim erexi; Sic effluxit mercurius, nunquam tamen omnis & altitudo verticalis mercurii in tubulo reſidui in omni ſitu ſibi conſtabat. Quod ſi autem, cum mercurius in tubulo ſic ſuſpenditur, extremitas tubi mercurio in vaſe ſtagnanti admovetur, protinus omnis effluit. Priora Phœnomena, ni fallor, indicant mercurio & aliis fluidis idem contingere, cum vi attractrici nullus eſt locus; mercurium autem fortiſſime ſe attrahere docet phœnomenon ultimum.

III. Sumatur tubus cylindricus vitreus diametri 3 aut 4 linearum, fundo inſtructus ex Charta ſubtili, aut tenuiſſima lamina ferrea parato & in medio minimo foraminulo perforato, ut oſtendit (Figura 12.) Inclinetur tubus A C B D & impleatur totus mercurio, dein ſenſim erigatur; fiet quod antea, & quamvis tubus ſit ampliſſimus, non tamen effluet omnis mercurius, ſed ſuſpenſa hærebit ejus pars, veluti M C D N, hæcque eo major erit quo minus eſt ejus foraminulum *o*. Dein cum fundum ſubmergitur Fig. 12.

mercurio, in vaſe alio ſervato, tantillum, ſic ut pars ſubmerſa tubi ſit $C\alpha$, non ſolum non aſcendit mercurius in tubo uſque in $\mathfrak{C}$ (ſumta ſcilicet $C\alpha = M\mathfrak{C}$) ſed & omnis fere effluit, donec ſuperficies MN pervenit in α. Porro tubum ACDB vacuum ſat profunde mercurio, qui erat in vaſe alio, ſubmerſi, nec tamen prius quicquam influere cœpit ex vaſe in tubum, quam ad altitudinem CM eſſet ſubmerſus; & tunc ſtatim eo usque influit donec ab utraque parte ad libellam ſit conſtitutus, nempe usque in MN, ſi ad eum locum usque erat ſubmerſus. Omnia hæc ex mutua particularum mercurialium attractione facile deducuntur. Cæterum dedi operam ut inveſtigarem relationem, quæ eſt inter altitudinem MC & amplitudinem foraminuli o; veriſimile utique eſt altitudinem illam eſſe in ratione reciproca diametri ad foraminulum pertinentis; nec tamen experimento conjecturam ſatis confirmare potui, tum ob impuritatem mercurii quo utebar, quæ faciebat, ut non variato foramine in iteratis experimentis altitudo ſuſpenſi mercurii ſibimet ipſi non omnino conſtaret, tum etiam, quod difficile eſt foraminula minima accurate metiri; debent enim foraminula eſſe minima, quandoquidem altitudo mercurii ſuſpenſi vix eſt ſex octove linearum, cum diameter foraminis ſextam partem lineæ æquat, dicam tamen qua methodo uſus fuerim. Filis nempe æneis, quibus in inſtrumentis muſicis utuntur, diverſæ craſſitiei, quorum diametros minimas ex longitudine & pondere eorum rectiſſime cognovi, chartulam CD perforavi; ſed ſic ſolent oriri circa latera foraminis fimbriæ quæ effluxum impediunt, & facile ſuccedit ut foramen majus ſit quam eſt craſſities fili.

Ad §. 18. *De firmitate tuborum.* Filum æneum rotundum, cujus diameter erat $\frac{2}{11}$ lin. Paris. cui ſucceſſive pondera continue majora appendebantur, prius non diſruptum fuit, quam ad 18. lib. Norimb. pondus excreviſſet. Dein tenuiſſimam lamellam plumbeam, cui rectangularis figura erat, $\frac{5}{4}$ lin. latam, $\frac{1}{131}$ lin. craſſam rumpi obſervavi cum eidem appenſum eſſet pondus trium unciarum cum dimidia. Ex hiſce obſervationibus duabus ſequitur cæteris paribus filum ex ære plus quam 28. vicibus fortius eſſe, quam filum ex plumbo. Ex priori experimento quoque deducitur, ſi tubus æreus diametrum habuerit unius pedis, & craſſities laterum fuerit $\frac{2}{11}$ lin. poſſe eum aquam ſuſtinere ad altitudinem 518. pedum priusquam rumpatur. In hoc calculo dedi pedi cubico aquæ pondus 70, librarum. Si vero idem

tubus fuerit plumbeus, ſuſtinebit aquam ad altitudinem 18. ped. vi alterius obſervationis, poteritque altitudinem aquæ ferre 99. ped. ſi latera tubi habeant in craſſitie lineam integram. Convenit hoc cum eo quod Mariottus in *tract. de motu aquarum* p. 472. habet, ubi nempe dicit tubum plumbeum, cujus diameter unius erat pedis, & laterum craſſities duarum linearum cum dimidia ſine ruptura aquam tuliſſe ad altitudinem centum pedum, quod cum obſervaret abraſit ſenſim latera, donec tandem ad lineæ craſſitiem eſſent diminuta, & tum denique vim aquæ tubum disrupiſſe.

Ex obſervata fili ænei firmitate colligitur etiam firmitas tormentorum bellicorum: fuerit v. gr. tormentum bellicum cujus animæ diameter habeat tres poll. ſolent autem haud procul à lumine accenſorio, ubi maxima eſt vis pulveris, craſſities laterum eſſe præterpropter æquales diametro animæ, ita ut diameter tota ſit tripla diametri animæ. Quia igitur craſſities hæc non eſt negligenda præ diametro animæ, cenſebimus materiam omnem concentratam in medio atque ſic ab axe animæ diſtantem tribus pollicibus. Hoc poſito erit altitudo maxima aquæ quam tormentum haud procul à lumine accenſorio ferre poteſt $= \frac{11}{2} \times 12 \times 3 \times 2 \times 518 = 205128$, quæ vis fere ſepties millies ſuperat elaſticitatem aëris naturalis. Oſtendam autem in ſequentibus, pulverem pyrium accenſum vim exercere poſſe ad rumpendum tormentum aliquantum quidem majorem, quam quæ dicta fuit, ſed non multum tamen excedentem. Reliquum autem firmitatis, quod requirunt tormenta, habent à cingulis ſeu faſciis, quæ dicuntur *plattes bandes & moulures*, præter id quod in primo ortu tormenti (*à l'endroit de la culaſſe*) craſſities major ſit quam quæ à nobis aſſumta fuit. Interim non pauca tormenta diſrumpi, ſic non mirabimur.

HYDRODYNAMICÆ
SECTIO TERTIA.
De velocitatibus fluidorum ex vaſe utcunque formato per lumen qualecunque effluentium.

§. I.

PRiusquam motum aquarum à gravitate propria ortum definire tentemus, ruminabimur quod in Sectione prima §. ʃ. 18. 19. 20. 21. & 22. à nobis allatum fuit de principiis ad hoc adhibendis.

Recordabimur nempe *aſcenſum potentialem* Syſtematis, cujus ſingulæ partes velocitate qualicunque moventur, ſignificare altitudinem verticalem, ad quam centrum gravitatis illius Syſtematis pervenit, ſi ſingulæ particulæ motu ſurſum converſo ſua velocitate, quantum poſſunt, aſcendere intelligantur, & *deſcenſum actualem* denotare altitudinem verticalem, per quam centrum gravitatis deſcendit, poſtquam ſingulæ particulæ in quiete fuerant. Tum etiam memores erimus neceſſario *aſcenſum potentialem* æqualem eſſe *deſcenſui actuali*, quando omnis motus in materia ſubſtrata hæret, nihilque de eo in materiam inſenſibilem aut aliam ad ſyſtema non pertinentem tranſit, & denique motum fluidorum talem proxime eſſe, ut ubique velocitas reciproce ſit proportionalis amplitudini vaſis reſpondenti, quâ de re ſuo loco alia quædam interjiciemus. Nunc convenit examinare ſequentem propoſitionem.

Problema.

§. 2. Si aqua per canalem utcunque formatum fluat, ejusque velocitas cognita ſit aliquo in loco, invenire *aſcenſum potentialem* omnis aquæ in canali contentæ.

Solutio.

Solutio.

Sit canalis utcunque formatus ST (Fig. 13. & 14.) per quem aqua fluit $bcfg$; aſſumitur, ſi in axe ae accipiatur punctum quodcunque n, per quod planum ad axem perpendiculare pm tranſeat, fore, ut omnes particulæ aqueæ in illo plano exiſtentes æquali velocitate fluant, & quidem tali, quæ ſit ubique reciproce proportionalis magnitudini ſectionis pm. Sit autem velocitas aquæ in gf talis, quæ debetur altitudini verticali qs, id eſt, ſit *aſcenſus potentialis* ſtrati aquei in gf æqualis lineæ qs, & quoniam hujusmodi altitudines ſunt in ratione quadrata velocitatum, ſequitur eſſe *aſcenſum potentialem* aquæ in pm æqualem quartæ proportionali ad quadratum amplitudinis pm, quadratum amplitudinis gf & altitudinem qs, nempe $= \frac{gf^2}{pm^2} \times qs$. His ita præmonitis ponemus in figura decima quarta eſſe curvam BPG, ſcalam amplitudinum canalis, ita ut poſita $AN = an$, denotet NP amplitudinem in pm: dein curvam HIK eſſe ſcalam *aſcenſuum potentialium*, ita ut ſit $NI = \frac{EG^2}{NP^2} \times qs$. fingatur nunc elementa ſingula curvæ HIK habere pondus æquale ponderi ſtrati aquei reſpondentis, & cadere centrum gravitatis iſtius curvæ in punctum L, & ducatur LO perpendicularis ad axem AE; ſic erit LO *aſcenſus potentialis* totius aquæ quæſitus. Ex mechanicis autem conſtat, ſi fiat tertia curva UXZ, cujus applicata NX ſit ubique æqualis $\frac{EG^2}{NP}$, fore LO æqualem quartæ proportionali ad ſpatium AEGB & AEZU atque lineam qs vel EK. Patet igitur quæſitum. Q. E. I. Fig. 13. & 14.

§. 3. Fuerit v. gr. canalis conicus, in quo ſuperficies anterior gf & poſterior bc diametros habeant ut m ad n, erit *aſcenſus potentialis* aquæ

$$= \frac{3m^3}{n(mm+mn+nn)} \times qs.$$

Problema.

§. 4. Datis variationibus infinite parvis tam ratione ſitus quam velocitatis, quæ ſuperficiei aquæ anteriori reſpondent, invenire variationes ad *aſcenſus potentiales* totius aquæ pertinentes.

Solutio.

Solutio.

Sit ſpatium AEGB $=$ M, ſpatium AEZU $=$ N, $qs = v$, erit *aſcenſus potent.* $= \frac{Nv}{M}$: quia vero quantitas aquæ in canali conſtanter eadem ponitur, erit ſpatium AEGB invariabile, adeoque $dM = o$ ita ut differentiale *aſcenſus potent.* ſit ſimpliciter $= \frac{Ndv + vdN}{M}$, habetur autem dN ex variatione ſitus aquæ. Patet igitur propoſitum. Q. E. I.

Scholion.

§. 5. Poterunt hæ propoſitiones inſervire pro motu fluidi intra vaſa moti, id eſt, non effluentis definiendo, uti ſuo loco oſtendam: at vero cum fluidum per foramen effluit, aptius inſtituetur aliter calculus, nempe ut ſequitur.

Problema.

§. 6. Invenire differentiam *aſcenſus potentialis* poſtquam guttula per foramen effluxit.

Solutio.

Fingamus aquam effluere ex vaſe *aimb* (Fig. 15.) utcunque for-
Fig. 15. mato, fundum ſit *im* perforatum foramine *pl*: quantitas aquæ, poſtquam jam data ejus quantitas effluxit, reſidua in vaſe ſit *cimd*; effluat autem tempuſculo infinitè parvo guttula *pnol*, ſuperficie *cd* deſcendente in ſitum *ef*: concipiatur in medio aquæ ſectio *gh* parallela ſuperficiebus *cd* vel *ef* ipſique fundo *im*; ſitque velocitas unius cujusvis particulæ in *gh* talis, ut poſſit aſcendere ad altitudinem *qs* ſeu v, cum nondum effluxit guttula & ad altitudinem *qz* ſive $v + dv$, poſtquam ea ipſa guttula effluxit. Omnibus his ita poſitis, quæritur incrementum *aſcenſus potentialis* aquæ poſtquam ſitum *cimd* commutavit cum ſitu *eipnolmf*, id eſt, poſtquam guttula emanavit.

Fig. 16. Fiat, ut antea, curva CGI (Fig. 16.) ceu ſcala amplitudinum, ubi adeoque CD vel EF repræſentabunt magnitudinem ſuperficiei aqueæ ante vel

vel poſt effluxum guttulæ, GH amplitudinem illam aſſumtam, IL magnitudinem fundi, PL magnitudinem foraminis, dum adhærens parallelogrammum minimum PNOL reſpondet guttulæ cylindricæ *pnol*: dein conſtruatur alia curva TRU, cujus applicatæ ſint rurſus æquales quadrato lineæ GH, diviſo per applicatam reſpondentem curvæ CGI, cui curvæ eadem conditione annexum eſt parallelogrammulum LOYX, cujus nempe latus LX eſt æquale quadrato lineæ GH diviſo per lineam PL.

Jam igitur apparet *aſcenſum potent.* aquæ ante effluxum guttulæ eſſe = quartæ proportionali ad ſpatium DCIPL, ſpatium DTUL & altitudinem qs, eundemque poſt effluxum guttulæ eſſe = quartæ proportionali ad ſpat. FEIPNOL, ſpat. FWUXYOL & altit. qz: ſunt autem in utraque analogia termini primi (nempe ſpat. DCIPL & ſpat. FEIPNOL) inter ſe æquales, igitur ſi quodvis horum ſpatiorum indicetur per M, ſpatium DTUL per N, ſpat FWUXYOL per $N + dN$, altitudo qs per v & qz per $v + dv$, erit incrementum *aſcenſus potentialis* durante guttulæ effluxu $= \frac{Ndv + vdN}{M}$. Quod ſi nunc ponatur $LD = x$, $FD = -dx$, $DC = y$, $HG = m$, $PL = n$, erit $DT = \frac{mm}{y}$, $LX = \frac{mm}{n}$, $LO = \frac{-ydx}{n}$ (quia ſpatium DFEC = ſpatio LONP), hincque $dN = LOYX - DFWT = -\frac{mmydx}{nn} + \frac{mmdx}{y}$, unde nunc incrementum quæſitum *aſcenſus potentialis* eſt $= \left(Ndv - \frac{mmvydx}{nn} + \frac{mmvdx}{y}\right) : M$. Q. E. I.

Problema.

§. 7. Retentis iisdem poſitionibus invenire *deſcenſum actualem* infinitè parvum aquæ, dum guttula effluit.

Solutio.

Cum in Figura decima quinta aqua ſitum *cdmi* mutat cum ſitu *efml onpi*, patet in utroque ſitu centrum gravitatis partis aquæ *efmi* in eodem loco eſſe, poſſeque proin concipi ſolam particulam *cdfe*, (quæ eſt $= -ydx$ dum tota aquæ maſſa eſt = M) deſcendiſſe in *lonp*. Sit jam altitudo par-

 ticulæ

ticulæ aqueæ *cdfe* ſupra guttulam *lonp* $= x$, altitudo centri gravitatis aquæ *efmi* a fundo $= b$, erit altitudo centri gravitatis omnis aquæ in ſitu *cdmi* ſupra fundum $= b - \frac{ydx}{M} \times (x - b)$ & in ſitu *efmlonpi* erit eadem altitudo $= \left(\frac{M + ydx}{M}\right) \times b$; unde differentia altitudinum ſeu *deſcenſus actualis* quæſitus $= -\frac{ydx}{M} \times x$, quæ æquatio indicat, guttulam quæ effluxerit multiplicandam eſſe per altitudinem aquæ ſupra foramen, productumque dividendum per quantitatem aquæ, ut habeatur *deſcenſus actualis*, qui fit dum guttula effluit, Q. E. I.

Problema.

§. 8. Determinare motum fluidi homogenei ex vaſe dato per foramen datum effluentis.

Solutio.

Quoniam per hypotheſin noſtram *aſcenſus potentialis* ſingulis momentis æqualis eſt *Deſcenſui actuali*, erit incrementum prioris dum guttula effluit æquale incremento poſterioris, quod ſimili tempuſculo oritur. Igitur ſi rurſus ſuperficies aquæ, poſtquam data ejus quantitas effluxit, ponatur $= y$, amplitudo vaſis quocunque in loco ad libitum aſſumta $= m$, amplitudo foraminis $= n$, altitudo aquæ ſupra foramen $= x$; ſi præterea quantitas N ea lege conſtruatur, quæ §. 6. indicata fuit, atque per v intelligatur altitudo debita velocitati aquæ in loco aſſumto, ubi nempe amplitudo vaſis eſt $= m$, erit per §. 6. incrementum *aſcenſus potentialis* $= \left(Ndv - \frac{mmvydx}{nn} + \frac{mmvdx}{y}\right) : M$, minimusque *deſcenſus actualis* $= \frac{-yxdx}{M}$ (per præced. §.); unde habetur $\left(Ndv - \frac{mmvydx}{nn} + \frac{mmvdx}{y}\right) : M = -yxdx : M$ ſeu $Ndv - \frac{mmvydx}{nn} + \frac{mmvdx}{y} = -yxdx$, quæ æquatio generaliter integrari poteſt, quandoquidem litteræ N & y ſunt functiones datæ ipſius x & litera v unius tantum dimenſionis eſt.

Corollarium I.

§. 9. Quum velocitates ſint in ratione reciproca amplitudinum, patet

patet fore altitudinem, quæ velocitati aquæ effluentis reſpondet $= \frac{mm}{nn} v$, quæ proin, ſi vocetur z, erit $nn N dz - mmzydx + \frac{mmnnzdx}{y} = mmyxdx$.

Corollarium 2.

§. 10. Si foramen ſit valde parvum, ratione amplitudinum vaſis, fit $n = o$, totaque æquatio abit in hanc $- mmzydx = - mmyxdx$ vel $z = x$; tunc igitur aqua ea conſtanter effluit velocitate, qua ad altitudinem ſupremæ ſuperficiei usque aſcendere poſſit, quem ſolum caſum Geometræ hactenus fuerunt recte aſſecuti: valetque hæc propoſitio pro omnibus vaſis utcunque formatis: at cum foramen non ut infinite parvum conſideratur, nequaquam negligenda eſt vaſis figura. Notari tamen poteſt, quod niſi foramen ſit ampliſſimum, ſine notabili admodum errore idem ut infinitè parvum conſiderari poſſit.

Corollarium 3.

§. 11. Cum fluidum non eſt ubique idem, ſimili modo inſtituendus eſt calculus, inquirendo nimirum tum in incrementum *aſcenſus potentialis* fluidi compoſiti, tum in *Deſcenſum actualem*, eaque inter ſe æquando. Quod ſi autem foramen ſit valde parvum, per ſe patet, quod etiam calculus oſtendit, fore ut fluidum velocitate exiliat altitudini debita tali, ut ſi vas ad eandem altitudinem liquore eodem, qui exilit, repletum ſit, eandem preſſionem latera foraminis ſuſtineant.

Scholium Generale.

§. 12. Priusquam Corollaria ſpecialiora ex theoria noſtra deducamus circa motum fluidorum ex vaſis cylindricis, conveniet hic examinare, quousque hypotheſes aſſumtæ cum rei natura conſpirent & quænam aliæ intervenire poſſint cauſæ, quarum in computo nullam rationem habuimus, motum fluidum diminuentes.

Quod primo attinet ad Principium *conſervationis virium vivarum* ſeu *perpetuæ æqualitatis inter aſcenſum potentialem deſcenſumque actualem* nihil hîc video, quod ei notabili impedimento eſſe poſſit, ſi modo à frictionibus, tenacitate, aëris reſiſtentia hujuscemodique aliis obſtaculis mentem abſtrahamus.

hamus. Sæpe quidem fit, ut principium iſtud non ſine limitatione adhiberi poſſit, quod in ſequentibus oſtendemus, nempe cum particulæ aquæ motu ſingulæ diverſo feruntur, quo fit ut ſingulis momentis aliquid de motu, vel ſi mavis de *aſcenſu potentiali*, perdatur. Sed in præſenti caſu nihil ſimile accidit, quandoquidem omnes particulæ ſimiliter fere moventur & præſertim, quando foramen eſt valde parvum, motus particularum internarum fere nullus eſt, nihilque adeo inde detrimenti venire poteſt. Alterum autem principium, quo aſſumitur velocitatem cujuslibet particulæ eam eſſe, quæ reſpondet inverſæ rationi amplitudinum, duplici quidem laborat incommodo, *primo* nempe, quod motus circa latera vaſis tardior paulo ſit quam in medio nec proin omnes particulæ eidem amplitudini vaſis reſpondentes, æquali velocitate ferantur, & *ſecundo*, quod aqua à fundo non admodum remota motum, quem principium hoc poſtulat, habere non poſſit: Utrumque autem nullum ſenſibilem errorem poſt ſe trahit, quando in hoc problemate ſimplici figura vaſis interna nihil fere ad motum aquæ effluentis attineat; Ex eadem ratione intelligitur non multum diverſum eſſe poſſe motum aquæ ſub alia quacunque directione effluentis, quia ſcilicet motus aquæ internus in ima vaſis parte tantum diverſus fit, hæcque diverſitas nullius momenti fere eſſe poteſt. Apparet ergo hypotheſes, quibus calculus noſtri hujus Problematis innititur, ita convenire cum natura quæſtionis, ut error inde nullus ſenſibus perceptibilis oriri poſſit. At vero impedimenta ſupra memorata, attritus, tenacitas fluidi aliaque ſimilia majoris efficaciæ ſunt, præſertim cum foramen, per quod fluida exiliunt, per quam exiguum, aut altitudo aquæ ſupra foramen admodum magna, aut denique tubus valde gracilis eſt, qua de re experimenta plurima extant apud Mariottum in *tract. de mot. aquarum.* Jam vero progredior ad examinandum motum aquarum ex vaſis Cylindricis per foramina cujuscunque magnitudinis effluentium. Vaſa autem compendii & elegantioris ſolutionis cauſa conſiderabimus verticaliter poſita.

De

De his quæ pertinent ad effluxum aquarum ex Cylindris verticaliter poſitis, per Lumen quodcunque, quod eſt in fundo horizontali.

§. 13.

GEometræ, quibus de aquis ex vaſe erumpentibus ſermo fuit, conſiderare potiſſimum ſolent cylindros verticaliter poſitos: Igitur haud abs re erit ex theoria noſtra generali conſectaria illa, quæ huc pertinent, deducere. Sit amplitudo cylindri ad amplitudinem foraminis ut m ad n; altitudo aquæ ſupra foramen, cum fluxus incipit $= a$; altitudo aquæ reſiduæ $= x$, altitudo velocitati aquæ internæ debita $= v$; erit in æquatione canonica paragraphi octavi $y = m$, $N = mx$ (per §. 6.) quæ adeoque abit in hanc æquationem.

$$mxdv - \frac{m^3}{nn} vdx + mvdx = -mxdx, \text{ vel}$$

$$\left(1 - \frac{mm}{nn}\right) vdx + xdv = -xdx$$

multiplicetur hæc poſterior æquatio per $x^{\frac{-mm}{nn}}$, ut habeatur

$$\left(1 - \frac{mm}{nn}\right) x^{\frac{-mm}{nn}} vdx + x^{1 - \frac{mm}{nn}} dv = -x^{1 - \frac{mm}{nn}} dx.$$

Poteſt jam hæc æquatio integrari: obſervanda autem eſt in Integratione conſtantis additio, talis nempe, ut a fluxus initio, id eſt, cum $x = a$, ſit velocitas fluidi nulla, ipſaque proin v pariter $= o$: ita vero oritur:

$$x^{1 - \frac{mm}{nn}} v = \frac{nn}{2nn - mm} \left(a^{2 - \frac{mm}{nn}} - x^{2 - \frac{mm}{nn}}\right) \text{ vel}$$

$$v = \frac{nna}{2nn - mm} \left(\left(\frac{a}{x}\right)^{1 - \frac{mm}{nn}} - \frac{x}{a}\right)$$

§. 14. Ex hâc igitur æquatione cognoſcitur altitudo generans velocitatem aquæ internæ; ubi notari meretur, ſi vas ſit ampliſſimum, mox poſſe cenſeri $v = \frac{nn}{mm} x$, poſtquam ſcilicet vel tantillum deſcendit aqua, id eſt,

ſtatim ac x paulo minor eſt quam a. Regula hæc fallit notabiliter tantum circa primum motus initium & ſi primum iſtud motus elementum conſideratur (quo nempe altitudo $a - x$ ut infinite parva cenſeri poteſt) indicat æquatio, eſſe tunc $v = a - x$. Unde ſequitur, in omni cylindro, quodcunque fuerit foramen, aquam internam inſtar corporum libere cadentium accelerari ab initio motus. Si vero motus aliquantulum continuet, eo minus fallet hæc Regula, quo majus fuerit foramen, & quo altior eſt aqua in tubo; ſi porro deſideretur altitudo ea, quæ velocitati aquæ effluentis reſpondeat, quam §. 9. poſuimus $= z$, erit $z = \frac{mm}{nn} v$, ſeu

$$z = \frac{mma}{2nn - mm} \left(\left(\frac{a}{x}\right)^{1 - \frac{mm}{nn}} - \frac{x}{a} \right)$$

§. 15. Cum n eſt $= m$, id eſt, cum nullum eſt fundum, apparet ex ipſa rei natura, aquam inſtar corporum gravium libere cadere atque accelerari, id ipſum autem indicat etiam æquatio; fit enim in hâc poſitione $z = a - x$. Si vero foramen eſt veluti infinite parvum ratione amplitudinis vaſis, quem caſum jam ſupra conſideravimus, ponendum eſt $n = o$, & tunc fit $z = x$, quod indicat, aquam ea conſtantur effluere velocitate, qua ad totam aquæ altitudinem aſcendere poſſit. Denique cum $mm = 2nn$, prodit $z = \frac{mm}{o}(x - x)$, ex quo valore cum nihil cognoſci poſſit, deſcendendum eſt ad æquationem differentialem §. 13. quæ nunc hæc eſt:

$$-v\,dx + x\,dv = -x\,dx, \text{ vel } \frac{x\,dv - v\,dx}{xx} = -\frac{dx}{x},$$

quæ integrata cum debitæ conſtantis additione dat $\frac{v}{x} = \log. \frac{a}{x}$, vel $v = x \log. \frac{a}{x}$, aut $z = 2v = 2x \log. \frac{a}{x}$.

§. 16. Velocitas aquæ effluentis ab initio creſcit poſteaque decreſcit, eſtque alicubi maxima, nempe eo in loco, quo aqua deſcendit ad altitudinem $a : \left(\frac{mm - nn}{nn}\right)^{nn : (mm - 2nn)}$; id quoque experientia edoctus indicavit Mariottus in *tract. de motu aquarum part. 3. diſc. 3. exp. 5*, ipſaque velocitas maxima talis eſt, quæ debetur altitudini

$\frac{mma}{mm - 2nn}$

$$\frac{mma}{mm-2nn} \times \left[\left(\frac{nn}{mm-nn} \right)^{nn:(mm-2nn)} - \left(\frac{nn}{mm-nn} \right)^{(mm-nn):(mm-2nn)} \right]$$

quæ quantitas reducta ſit =

$$\frac{mma}{mm-nn} \left(\frac{nn}{mm-nn} \right)^{nn:(mm-2nn)}$$

Intelligitur ex iſtis formulis tempus, quo velocitas à nihilo in maximam vertitur, plane imperceptibile eſſe, quando foramen vel mediocriter parvum tubusque non admodum longus eſt: notabile autem fieri, cum res ſecus ſe habet, quod videmus in fontibus ſalientibus, ad quos aquæ per longos tractus vehuntur; hæc vero quæ ad tempora pertinent, magis in ſequenti ſectione explicabuntur, atque ſimul oſtendetur, quam parum aquæ ex vaſis ampliſſimis ejiciatur, priusquam maxima velocitate effluant.

Natura velocitatum melius intelligitur ex appoſita Figura decima ſeptima, in quâ ſi A B repræſentet totam altitudinem fluidi ſupra foramen ab initio fluxus, exprimeut curvæ A 1 C B, A 2 C B, A 3 C B, A 4 C B, ſcalas altitudinum reſpondentium, ad quas fluidum effluens ſua velocitate aſcendere poſſit in diverſis foraminum magnitudinibus: nempe ſcala accedet ad figuram A 1 C B, ſi foramen habeat exiguam rationem ad vaſis amplitudinem & ad figuram A 2 C B, cum aſſumitur fundum majori lumine perforatum; & ſi jam ratio foraminis ſit ad amplitudinem vaſis ut 1 ad $\sqrt{2}$, erit ſcala illa ut A 3 C B (quo in caſu minor fit maxima velocitas quam in quocunque alio, eſtque nominatim ea quæ debetur altitudini $\frac{2a}{c}$, intelligendo per c numerum cujus Logarithmus eſt unitas, id eſt, altitudini paulo minori quam $\frac{3}{4}a$) ac denique erit ſcala ut A 4 C B cum fere nihil fundi ſupereſt. Fig. 17.

§. 17. Jam vero exemplo quodam illuſtrabimus, quod ſupra §. 10. indicatum fuit, nempe niſi foramen ſit ampliſſimum, poſſe id ſine valde ſenſibili errore in calculo conſiderari ut infinitè parvum, atque adeo aſſumi $z = x$, ut §. §. 10. & 15. dictum fuit. Videtur id tantum apud nonnullos Auctores valuiſſe, ut cenſuerint, nullam magnitudinis in foramine rationem unquam eſſe habendam, quantumvis magnum ponatur foramen, quæ res certe ridicula eſt: ſaltem nemo hactenus quod ſciam magnitudinem foraminis pro hoc negotio recte conſideravit. Ponamus igitur cylindrum, cujus diameter quadrupla tantum ſit diametri foraminis, cujusmodi magna foramina

mina in inſtrumentis hydraulicis raro occurrere ſolent, & fingamus ſuperficiem aquæ per centeſimam partem deſcendiſſe tantum totius altitudinis initialis (deſcendiſſe autem aliquantulum aſſumo, quia à primo initio motus aquæ nullus ineſſe poteſt, nedum tantus, ut aqua effluens ad totam altitudinem aſcendere motu ſuo poſſit) hæ poſitiones faciunt $m = 16n$ & $mm = 256nn$, atque $x = \frac{99}{100}a$, unde prodit

$$z = \frac{128}{127}\left(\frac{99}{100} - \left(\frac{99}{100}\right)^{255}\right)a = \frac{92}{100}a,$$

quæ quidem aliquantulum differt à quantitate x, ſeu $\frac{99}{100}a$, ſed tamen non multum admodum, fitque differentia multo minor, cum minus eſt foramen, & paullo magis deſcendit ſuperficies aquæ. Igitur differt hæc Theoria à vulgari potiſſimum circa fluxus initium, quo minor eſt motus, quam ſtatutum fuit: è contrario circa fluxus finem majori velocitate aqua ejicitur, quam ſecundum principia ſolita deberet.

§. 18. Hactenus conſideravimus motum aquæ à propria ſua gravitate ortum; ponamus nunc vi aliena aquam ejectam fuiſſe præter vim gravitatis, talemque aquæ effluenti communicatam fuiſſe velocitatem, qua ad altitudinem multo majorem aſcendere poſſit, quam ſi ſola aquæ gravitas motum produxiſſet; dein ſubito vim illam alienam evaneſcere, & aquam ſibi relinqui; Id autem ſi fiat, experientia docet citiſſime aquæ velocitatem decreſcere & mox talem eſſe, ut notabililer non ſuperet velocitatem eam, quæ ex ſola aquæ gravitate oritura fuiſſet. Ita videmus fieri aliquando in fontibus ſalientibus (de cujus rei cauſa vera atque menſura alibi dicam) ut aquæ ad triplam vel quadruplam majoremve altitudinem aſſiliat, quam eſt ordinaria; quod cum ita contingit, ſaltus iſte protinus ceſſat ſolitamque altitudinem, quantum id ſenſibus percipi poteſt, non excedit: loquor autem de tubis foraminibus non valde magnis perforatis; nam cum foramen eſt aliquanto majus, non ita cito decreſcit aquæ ſaltus. Jam itaque examinabimus, quousque theoria cum iſtis phænomenis conveniat, accuratasque menſuras eorum, quales inde ſequuntur, ſubjungemus. Ut vero rem generaliter proſequamur, ponemus rurſus amplitudinem cylindri ad amplitudinem foraminis ut m ad n: aquam ea explodi velocitate qua aſſurgere poſſit ad altitudinem α, eoque ipſo temporis puncto altitudinem aquæ ſupra foramen

eſſe

eſſe $= a$, cujus ſola gravitas nunc aquam expellat; deinde deſcendere ſuperficiem aquæ in Cylindro per altitudinem verticalem $a-x$, ita ut altitudo reſidua ſit $= x$ & tunc velocitatem aquæ ejectæ talem eſſe, quæ debeatur altitudini z. His ita poſitis utemur æquatione generali differentiali §. 9. quæ hæc eſt $nnNdz - mmzydx + \frac{mmnnzdx}{y} = -mmy\alpha dx$ (ubi rurſus, ut §. 13. indicatum fuit, eſt $y = m$ & $N = m\alpha$) quæque in caſu noſtro particulari talis fit

$$\left(1 - \frac{mm}{nn}\right) zdx + xdz = -\frac{mm}{nn}\alpha dx,$$

quæ multiplicata $x^{-\frac{mm}{nn}}$ poſteaque ſic integrata, ut poſita $x = a$, fiat $z = \alpha$ dabit æquationem deſideratam finalem

$$z = \left(\frac{mm}{2nn-mm} + \frac{\alpha}{a}\right) a^{\frac{2nn-mm}{nn}} \times x^{\frac{mm-nn}{nn}} - \frac{mm}{2nn-mm} x$$

$$\text{vel } z = \frac{mma}{2nn-mm}\left(\left(\frac{a}{x}\right)^{1-\frac{mm}{nn}} - \frac{x}{a}\right) + \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{mm-nn}{nn}} \alpha$$

quæ altitudo ſi comparetur cum illa, quæ paragrapho 14. indicata fuit, invenitur exceſſus unius ſuper alteram $= \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{mm-nn}{nn}} \alpha$; unde jam omnia ea confirmantur Phænomena, quæ modo indicata fuerunt; exceſſus enim iſte, cum m numerus eſt multo major quam n, inſenſibilis ſtatim fit, poſtquam aqua vel tantillum deſcendit, id eſt, poſt breviſſimum temporis ſpatium, nunquam tamen omnis evaneſcit, quam diu durat fluxus, & denique eo notabilior continue eſt, quo magis ratio numeri m ad n ad æqualitatem accedit. Fuerit v. gr. diameter tubi decies major diametro foraminis, expellaturque aqua vi tali, ut velocitate ſua aſſilire poſſit ad altitudinem quæ ſit quadrupla altitudinis a ſeu aquæ ſupra foramen, quæritur ad quam altitudinem ſua velocitate aqua effluens aſcendere poterit, poſtquam per milleſimam partem ipſius a ſuperficies aquea deſcenderit in tubo, ſi interea aqua ſola propria gravitate ad effluxum ſolicitetur, dein quænam ſimilis altitudo futura fuiſſet, ſi aqua nullum motum ab initio habuiſſet: eſt autem $m = 100n$, $mm = 10000nn$, $x = \frac{999}{1000}a$, $\alpha = 4a$, unde in priori caſu fit

 $z =$

$$z = \left[\frac{10000}{9998} \left(\frac{999}{1000} - \left(\frac{999}{1000} \right)^{9999} \right) + 4 \left(\frac{999}{1000} \right)^{9999} \right] a,$$

ſive $z = \frac{99915}{100000} a + \frac{18}{100000} a$, in poſteriori caſu autem fit $z = \frac{99915}{100000} a$, ex quo exemplo patet, quam exiguus & plane inſenſibilis ſit exceſſus prioris altitudinis ſupra alteram, & quam cito diminuatur jactus ille aqueus, quandoquidem tota mutatio fiat, dum ſuperficies aquæ per milleſimem partem altitudinis a deſcendit, quod tempus in machinis hydraulicis ſolitis non poteſt non eſſe admodum breve. Tum etiam confirmatur, quod ſupra Paragrapho 17. dictum fuit, eſſe ſcilicet proxime $z = x$, quando foramen eſt vel mediocriter parvum, cum in præſenti caſu, ubi motus à quiete incipit, differentia inter z & x ſit tantum quindecim centies milleſimarum partium ipſius altitudinis a; quoniam interim paululum major eſt altitudo z quam x, patet ad majorem altitudinem aſcendere poſſe aquam effluentem, poſtquam aliquantiſper effluxit aqua, quam eſt altitudo aquæ ſupra foramen.

§. 19. Poſtquam ſic ex Theoria noſtra generali deduximus, quæ motum fluidorum ex cylindris verticaliter poſitis ſpectant, jam etiam conſiderabimus tubos oblique poſitos, qui prælongi eſſe ſolent in fontibus ſalientibus. In his enim id ſingulare eſt, quod acceleratio motus non ita repente fiat, veluti cum Cylindri ſunt verticales atque ſic liceat ſenſibus percipere conſenſum Theoriæ, cum motu aquarum reali.

§. 20. Fingamus canalem utcunque incurvum, ſed tamen Cylindricum, cujus amplitudo habeat rurſus ad amplitudinem foraminis rationem m ad n. Incipiat motus à quiete, ſitque altitudo verticalis aquæ ſupra foramen ab initio motus $= a$; Effluxerit certa aquæ quantitas, ponaturque altitudo verticalis aquæ reſiduæ ſupra foramen $= x$, longitudo canalis, quæ eo ipſo momento plena eſt $= \xi$, habeatque tunc aqua interna (cujus ſingulas particulas motu axi canalis parallelo feri hîc aſſumo) velocitatem, quæ reſpondeat altitudini v; His ita poſitis, ſi ſimili ratiocinio utamur quo ſupra, quærendo nimirum incrementum *aſcenſus potentialis* dum guttula effluit, uti paragrapho 6. fecimus, idemque ponendo $=$ *deſcenſui actuali*, obtinetur nunc talis æquatio

$$\xi dv - \frac{mm}{nn} v d\xi + v d\xi = -x d\xi, \text{ ſive}$$

$\left(1 - \frac{mm}{nn}\right)$

$$\left(1-\frac{mm}{nn}\right) v\,d\xi + \xi\,dv = -x\,d\xi$$

cujus integralis, quod patet multiplicatis terminis per $\xi^{-\frac{mm}{nn}}$ hæc eſt

$$v = \xi^{\frac{mm}{nn}-1} \int -x\,\xi^{-\frac{mm}{nn}}\,d\xi.$$

Fuerit v. gr. canalis rectus & ita inclinatus verſus horizontem, ut ſinus anguli intercepti inter utrumque ſit ad ſinum totum ut 1 ad g, erit $\xi = gx$; unde

$$v = \frac{-nna}{2nn-mm}\left(\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{nn-mm}{nn}} - \frac{x}{a}\right)$$

quæ æquatio cum non differat ab æquatione §. 13. pro Cylindris verticalibus data, ſequitur in utroque caſu velocitates aquæ easdem eſſe, poſtquam deſcenſus verticales ſuperficiei aquæ iidem ſunt: Igitur accelerationes in locis homologis utrobique ſimiles ſunt ratione altitudinum verticalium, & hoc tantum diſcriminis intercedit, quod in canali inclinato lentius fiant, idque in ratione ut 1 ad g: facile igitur ſenſibus percipi poterunt hæ accelerationes in canalibus valde inclinatis, quæ in verticalibus ob nimiam mutationum celeritatem non poſſunt. Cœterum patet per ſe ex eo, quod frictiones à longitudine tubi augeantur, non poſſe non velocitates inde diminui, ad quod animum advertent ii, quibus experimenta hâc de re inſtituere animus erit.

De Effluxu Aquarum ex Cylindris verticaliter poſitis, qui in alios tubos ſtrictiores pariter verticales deſinunt.

§. 21.

CONſtat experientia, inter duos Cylindros omnino æquales ſimiliterque poſitos, quorum alterius foramini tubus ſtrictior reſpondeat, hunc citius depleri, qui tubum appenſum habet, & quidem eo citius, quo magis tubus à loco inſertionis verſus extremitatem amplitudine creſcit, quæ pluribus expoſuit D. s'Graveſande in *Phyſ. Elem. Math.* lib. 2. cap. 8. Totam rem ſequenti Problemate comprehendemus.

Problema.

Fig 18. §. 22. Fuerit vas cylindricum AEHB (Fig. 18.) verticaliter poſitum perforatum in FG, quo lumine communicet cum tubo conico FMNG, per cujus demum orificium MN aquæ effluant. Quæritur velocitas ſuperficiei aqueæ CD, poſtquam à quiete deſcendit per AC vel BD.

Solutio.

Sit altitudo aquæ ſupra MN initialis, nempe $NG + HB = a$, altitudo ſuperficiei aqueæ in ſitu CD ſupra MN, id eſt, $NG + HD = x$; longitudo tubi annexi ſeu $NG = b$; amplitudo orificii $MN = n$; amplitudo orificii $FG = g$, amplitudo Cylindri ſuperioris $= m$; ſit velocitas ſuperficiei aqueæ in CD talis quæ debeatur altitudini v, erit in æquatione generali §. 8. $y = m$ & $N = m\ (x - b) + \frac{bmm}{\sqrt{gn}}$, quæ ſubſtitutiones inſtituto calculo conformes eſſe patebunt cum §. 6. reliquæ autem poſitiones eædem ſunt quæ ante. Abit igitur æquatio paragraphi 8 in hanc

$$m(x-b)\,dv + \frac{bmm}{\sqrt{gn}}\,dv - \frac{m^3 v\,dx}{nn} + mv\,dx = -mx\,dx$$

quæ porro diviſa per m factoque $x - b + \frac{mb}{\sqrt{gn}} = z$, dat

$\left(1 - \frac{mm}{nn}\right)$

$$\left(1-\frac{mm}{nn}\right)vdz+zdv=-zdz-bdz+\frac{mbdz}{\sqrt{gn}}$$

quæ multiplicata per $z^{\frac{-mm}{nn}}$ facit

$$\left(1-\frac{mm}{nn}\right)z^{-\frac{mm}{nn}}vdz+z^{1-\frac{mm}{nn}}dv=-z^{1-\frac{mm}{nn}}dz-bz^{-\frac{mm}{nn}}dz+\frac{mbz^{-\frac{mm}{nn}}dz}{\sqrt{gn}}$$

poſt cujus integrationem addita conſtante C oritur

$$z^{\frac{nn-mm}{nn}}v=C-\frac{nn}{2nn-mm}z^{\frac{2nn-mm}{nn}}-\frac{nnb}{nn-mm}z^{\frac{nn-mm}{nn}}+\frac{mnnb}{(nn-mm)\sqrt{gn}}z^{\frac{nn-mm}{nn}}$$

in quo valor quantitatis conſtantis C ex eo definitur quod ab initio fluxus (cum nempe $x=a$ ſive $z=a-b+\frac{mb}{\sqrt{gn}}$) ſit $v=o$ quia non poteſt motus oriri in inſtanti temporis puncto; hinc igitur fit C =

$$\left[\left(a-b+\frac{mb}{\sqrt{gn}}\right)\times\frac{nn}{2nn-mm}+\frac{nnb\sqrt{gn}-mnnb}{(nn-mm)\sqrt{gn}}\right]\times\left(a-b+\frac{mb}{\sqrt{gn}}\right)^{\frac{nn-mm}{nn}}$$

Ex his quidem æquationibus definiuntur omnia; quia verò calculus ſit paullo prolixior, niſi amplitudo vaſis ſuperioris indicata per m tanta ſit, ut poſſit ratione amplitudinum g & n infinita cenſeri, hunc ſolum conſiderabimus caſum, idque eo magis quod error notabilis inde non oriatur, etſi mediocris ſit magnitudinis numerus $\frac{m}{n}$ aut $\frac{m}{g}$

§. 23. Quod ſi proinde ponamus $m=\infty$, ſimulque utamur primâ æquatione differentiali proximi paragraphi, atque in hâc ponatur $v=\frac{nn}{mm}s$, ut ſic inveniatur ex valore litteræ s altitudo ad quam aqua per orificium MN effluens ſuâ velocitate aſcendere poſſit, erit primo

$$\frac{nn}{m}(x-b)ds+\frac{bnn}{\sqrt{gn}}ds-msdx+\frac{nn}{m}sdx=-mxdx$$

& quia $m=\infty$ atque facile prævidetur rationem fore finitam inter s & x, atque inter ds & dx, hæc eadem æquatio mutabitur rejectis terminis rejiciendis rurſus in hanc $-msdx=-mxdx$ vel $s=x$, quod pariter paragr. 10. jam

jam fuit demonſtratam. E re vero duxi id de novo hic demonſtrare, quia caſus præſens diverſus videri poterat ab illo, de quo in præfato paragrapho dicitur. His intellectis non opus eſt pluribus explicare Phænomena circa hanc rem §. 21. Auctore s'Graveſande indicata; patet enim, aquam non aliter effluere per vas compoſitum A E F M N G H B, quam per vas ſimplex A O M N P B, cum nempe orificium M N eſt valde parvum, atque hinc majorem eſſe velocitatem ſuperficiei aqueæ C D, quam ſi per vas A E F G H B aquæ effluerent, poſito orificio M N = F G, multoque magis ſi M N fuerit majus quam F G, quod fit cum tubus verſus inferiora amplitudine creſcit: attamen obſervari debet, ab initio motus aquam tardius deſcendere, quam ſic definitum fuit, nec regulam iſtam prius locum habere quam ſuperficies C D per ſpatiolum aliquod deſcenderit, quod tamen brévi fit tempore: mutationes, quæ ab initio motus fiunt, in hoc caſu, examinabimus in ſectione ſequente.

§, 24. Eodem modo computus eſſet inſtituendus, ſi vaſi, quod ſemper nunc amplitudinis infinitæ ponimus, implantatus eſſet tubulus non verti-
Fig. 19. calis ſed horizontalis, veluti in fig. 19. aut ſub alia directione qualicunque, ſemper autem reperietur aquas per orificium M N mox, poſtquam ſuperficies aquæ in vaſe principali aliquantulum deſcendit, ea proxime effluere velocitate, quæ reſpondeat altitudini iſtius ſuperficiei ſupra orificium; Inde liquet quod manentibus tam altitudine aquæ ſupra tubulum G N, quam ipſo orificio F G, augeatur quantitas aquæ dato tempore effluens ab aucta amplitudine orificii M N: Sic igitur demonſtratum hic dedimus, quod dictum fuit in fine §. 5, *Sect.* 1. Frontinum experientia fuiſſe edoctum, nempe, *plus debito aquæ erogari per calicem legitimæ tum menſuræ tum poſitionis, cui ſtatim fiſtulæ amplioris moduli ſubjectæ ſint.* Et quidem quantitates aquæ cæteris paribus erogari deberent ipſis orificiis M N proxime proportionales, niſi multa eſſent impedimenta; quæ hanc quantitatem valde diminuant, de quibus proxime dicam: facere poſſunt hæc impedimenta; ut admodum parum fluxus aquarum promoveatur ab aucto orificio extremo; ſemper tamen promovebitur aliquantum.

§. 25. Ex præmiſſis liquet velocitatem, qua ſuperficies aquæ C D in utroque, de quo diximus, caſu deſcendit cæteris paribus pendere ab amplitudine orificiorum M N; Hæc autem ea innituntur hypotheſi, quod aqua lateribus tubulorum G N ubique adhæreat & pleno orificio M N effluat, quæ hypo-

hypotheſis locum amplius habere non poſſet, ſi nimium orificium iſtud augeretur. Dein patet quoque, cum aquæ per tubum verticalem in fig. 18. effluunt, earum fluxum accelerari à longitudine hujus tubi auctá : poſſet tamen hæc quoque ita augeri, ut tandem aquæ deſinant eſſe continuæ in tubo, quin potius in columnas dividantur, quod fiet, ſi tubus longitudinem habeat plus quam triginta duorum pedum aut minorem etiam, ſi ſimul amplitudine creſcat verſus M N; ita ſi orificium M N duplum ſit orificii alterius F G, non poterit longitudo major eſſe quam octo pedum, ſine periculo ſubſecuturæ aquarum ſeparationis in ſuprema tubi parte, quam rem alibi demonſtrabo : ſed eſt alia inſuper cauſa præter nimiam tubi longitudinem, quæ aquæ ſeparationem producere poteſt, nempe quod altitudo aquæ C E H D minor ſit, quam ut ſat cito in tubum irrumpere poſſit, quo fit, ut aër una cum aqua ſimul ſuperne influat, dum ſuperficies aquæ formam cataractæ ſeu infundibuli cavi aſſumit, ſic ut non totum orificium F G aqua obtegatur; Hæc quidem res facit, ut aqua minori copia effluat, non autem ut minori velocitate, quod poſterius putavit Auctor quidam Italus, nomine Carolus Fontana, qui hác de re Linguâ ſua vernacula ita ſcripſit : *mà ſe non vi foſſe*, inquit, *tant' acqua, che baſtaſſe à mantenere piena detta canna, l'acqua attraherà l'aria dentro di ſe in tanta quantità, quanto gli mancherá l'acqua intermettendoſi fra l'acqua dà ogni banda; mà la velocità dell' acqua mancherá tanto, quanto ſará l'altezza di tutta l'aria raccolta inſieme che ſarà in eſſa canna.* Rationem ejus, quod dixi, non inde velocitatem aquæ diminui poſſe, quilibet perſpicit ex eo, quod alias non poſſet *aſcenſus potentialis* eſſe æqualis *deſcenſui actuali* poteritque res facili experimento confirmari, incurvata tubi extremitate M N, ut aquæ horizontaliter effluant, & ex amplitudine jactus velocitas aquæ dignoſci poſſit. Quomodo autem pro lubitu fieri poſſit, ut nullis mutatis aliis circumſtantiis aër aquis circa ſummitatem tubi miſceatur, ſic habe : fiat nempe parvulum foramen in tubo haud procul ab orificio F G (Fig. 18. & 19.) quod ſi autem durante aquæ fluxu digito obturaveris iſtud foraminulum, aquæ transfluent puræ, & ſi removeris digitum, mox aër per foraminulum idem irrumpet ſeque cum aqua præterfluente miſcebit. His intellectis facile erit rationem reddere Phænomenorum, quæ in caminis ſeu fumi-ductibus obſervantur, fumus enim altum petit, quia aëre levior eſt, quod conſtat experimentis de fumo in vacuo, ubi deſcendiſſe viſus fuit, ſumtis: idem igitur eſt de fumo aſcendente,

dente, quod de aqua deſcendente: hæc autem in fig. 18. eo celerius effluit per orificium M N, quo amplius eſt, & quo humilius poſitum: ergo etiam fumus eo celerius caminum tranſibit, eoque magis ignis in foco accendetur, quo altius ducetur caminus, & quo magis ſuperiora verſus divergit, ſi modo non nimis divergat; quod utrumque experientia confirmat; Ipſe deinde inſuper expertus ſum, ſi caminus alicubì perforetur, tantum abeſſe, ut fumus per foramen iſtud exitum tentet, quin potius aër magno impetu irruat, ſeque fumo miſcens per caminum aſcendat, non ſecus atque aërem per foraminulum e in tubum F G N M (Fig. 18. & 19.) irrumpere indicavimus. Ita vero fumus minori certe copia, aut ſaltem difficilius aſcendet ignisque remittet.

Cæterum duæ ſunt potiſſimum cauſæ, altera aliena altera naturæ rei propria, quæ motum aquæ valde retardare poſſunt in fig. 18. & 19. Prior eſt adhæſio aquæ ad latera tubi, & altera, quod cum tubus amplitudine creſcit velocitas aquæ, nullibi ſibi conſtans in quovis tubi loco mutetur, quæ mutatio ſi oriri cenſeatur ab impulſibus infinite parvis aquæ velocius motæ in aquam minus velociter motam, apparet ſingulis momentis ab impulſibus his corporum mollium aliquid de *aſcenſu potentiali* perdi, unde neceſſario aquarum effluxus notabiliter diminuitur.

§. 26 Loco ultimo nunc dicam quædam de vaſis recurvis, ex quibus aquæ non omnes effluunt: brevitatis autem gratiâ canalem conſiderabimus cylindricum, & cujus quidem pars, quam ſuperficies aquea non tranſgreditur, ſit recta.

Problema.

Sit nempe canalis cylindricus C E D B (Fig. 20.) cujus pars C E quan-
Fig. 20. ta ſufficit eſt recta, reliqua E D B utcunque incurvata; fuerit canalis totus aqua plenus effluxura per foramen B, perveneritque ſuperficies aquæ ex C in F, quæritur altitudo reſpondens velocitati aquæ in F.

Solutio.

Ducantur verticalis B H & horizontales C H, F G, A B, ſitque ſinus anguli H C E ad ſinum totum ut 1 ad g: Jam vero ſi rem recte perpendamus, videbimus contineri problema præſens in altero generaliori, quod ſuprà paragrapho 20. tractavimus, ubi habuimus hanc æquationem:

$$v = \xi^{\frac{mm}{nn}-1} \int -x\,\xi^{-\frac{mm}{nn}}\,d\xi$$

ubi

ubi pro noſtro caſu præſente intelligitur per v altitudo quæſita reſpondens velocitati ſuperficiei aqueæ in ſitu F, per ξ longitudo B D E F & per x altitudo B G, atque per $\frac{m}{n}$ index rationis inter amplitudines tubi & foraminis B: Quod ſi vero dicatur longitudo B D A $= \alpha$ erit $x = \frac{\xi - \alpha}{g}$, unde nunc habetur

$$v = \xi^{\frac{mm}{nn} - 1} \int -\left(\frac{\xi - \alpha}{g}\right) \xi^{\frac{-mm}{nn}} d\xi$$

Indicetur longitudo totius canalis B D E C per $\mathfrak{C}$, & erit

$$\int -\left(\frac{\xi - \alpha}{g}\right) \xi^{\frac{-mm}{nn}} d\xi = \frac{nn\alpha}{g(nn - mm)} \left(\xi^{\frac{nn - mm}{nn}} - \mathfrak{C}^{\frac{nn - mm}{nn}}\right)$$
$$\frac{-nn}{g(2nn - mm)} \left(\xi^{\frac{2nn - mm}{nn}} - \mathfrak{C}^{\frac{2nn - mm}{nn}}\right)$$

atque proinde

$$v = \frac{nn\alpha}{g(nn - mm)} \left(1 - \left(\frac{\mathfrak{C}}{\xi}\right)^{\frac{nn - mm}{nn}}\right)$$
$$-\frac{nn\xi}{g(2nn - mm)} \left(1 - \left(\frac{\mathfrak{C}}{\xi}\right)^{\frac{2nn - mm}{nn}}\right). \text{ Q. E. I.}$$

Scholium.

§. 27. Quoniam hæ æquationes ſunt paullo prolixiores non immorabimur generali earundem contemplationi, conſideraturi potius caſus iſtos particulares, qui calculum abbreviant, nec ultima iſta æquatione definiri poſſunt.

Si operculum in B omne abeſſe ponamus, fit $m = n$ & (quod ſeorſim pro hoc pariter atque altero caſu mox dicendo erui debet)

$$v = \frac{b - \xi + \alpha \log. \xi - \alpha \log. \mathfrak{C}}{g}$$

tuncque velocitas maxima eſt in A, nominatimquæ talis, quæ reſpondet altitudini $\frac{\mathfrak{C} - \alpha + \alpha \log. \alpha - \alpha \log. \mathfrak{C}.}{g}$

G De-

Denique punctum E maximo reſpondens deſcenſui obtinetur ope hujus æquationis,

$$\xi - \alpha \log. \xi = \beta - \alpha \log. \beta$$

Alter caſus ſeorſim ſubducendus calculo eſt, cum $mm = 2nn$, ubi oritur

$$v = \frac{\alpha\xi - \alpha\beta - \xi\beta \log. \xi + \xi\beta \log. \beta}{g\beta}$$

atque ſi capiatur, poſito c pro numero, cujus logarithmus eſt unitas, $\xi = c^{\frac{\alpha - \beta}{\beta}} \beta$ determinabitur ſic locus maximæ velocitatis, cujus altitudo generatrix eſt $= c^{\frac{\alpha - \beta}{\beta}} \beta - \alpha$, dum maximus deſcenſus, qui proportionalis eſt toti aquæ effluenti, definitur faciendo

$$\alpha\xi - \alpha\beta - \xi\beta \log. \xi + \xi\beta \log. \beta = 0$$

Non dubito, quin hæc ad amuſſim experientiæ eſſent reſponſura, ſi modo adhæſio aquæ ad latera tubi motum non retardaret; puto tamen, eventum experimentorum talem eſſe poſſe, ut intelligenti, qui horum impedimentorum rationem habeat, ſatis oſtendant propoſitionum veritatem.

§. 28. Ultimo loco communicabo veram ſolutionem phænomeni alicujus, quod primo aſpectu valde videtur paradoxon. Poſtquam enim ex omnibus hactenus dictis luculenter apparet fieri non poſſe, ut aquæ multo majori velocitate effluant quam qualis altitudini aquæ ſupra foramen debetur, (poſſunt tamen aliquanto majori, præſertim ſi foramina ſunt magna, *confer ea quæ dixi de velocitatibus maximis* §. 16.) multis mirum fortaſſe videbitur, *contingere aliquando in fontibus ſalientibus, ut aqua ad temporis momentum jactum faciat longe altiorem, quam ſecundum regulas noſtras fieri poſſe videtur.* Verum tantum abeſt, ut hæ inde aliquid roboris perdant, quin potius egregie confirmentur. Solutio autem paradoxi in eo conſiſtit, quod nos hactenus aquas conſideraverimus continuas, & nullo vacuo aëreo ſeparatas: Recteque obſervavit D[us]. De la Hire non fieri hujusmodi ſaltus irrregulares, niſi aër una cum aqua tubum prope ſcaturiginem fuerit ingreſſus, quod ſæpe fieri indicavi §. 25. Iſte vero aër ſimul cum aqua fertur usque ad orificium effluxus, per quod mox erumpit: id dum fit, maſſa aquea impetum

tum acquirit, qui in expellendas aquas ſolus impenditur, hocque pacto enormem jactum producit. Hanc phænomeni cauſam mox clarius una cum debitis menſuris explicabo, poſtquam præmiſero verba, quæ hâc de re extant, *in hiſtor. Acad. Reg. ſc. Paris. ad An. 1702. On voit quelques fois*, dicitur in loco citato, *l'eau qui ſort par un ajutage ſaillir trois ou quatre fois plus haut que ne lui permét la hauteur du réſervoir, auſſi ſe rêmet-elle bien vite à la hauteur, que lui preſcrivent les loix de l'hydroſtatique. Mais comment a-t-elle pu en ſortir en un inſtant. Mſr. De la Hire l'attribue a de l'air enfermè dans la conduite, qui ayant été preſſé & mis en reſſort par l'eau, qui deſcendoit toujours, s'eſt debandé contre celle qui montoit & lui a donné cette viteſſe momentanée.*

Recte itaque animadvertit Dn. De la Hire aëri ſaltum deberi, dubiumque nullum eſt quin veram rationem, quâ aër id producere poſſit, fuiſſet eruturus, ſi phænomenon, quod obiter attigit, attentius conſideraſſet, facile utique perſpecturus, aërem inter medias aquas nullam ſuſtinere preſſionem, niſi ſuper incumbentis aquæ (imo ne hanc quidem in aquis fluentibus, uti inferius in ſect. XII. demonſtrabo) nec adeoque aërem compreſſum fortius expellere poſſe aquam ſibi præcedentem, quam ſi ſui loco aqua eſſet. Ego quidem prævidi (quod facillimo experimento ſæpe poſtea ſum expertus) non eſſe aquam ante aërem poſitam ſolito altius aſſurgentem, ſed illam, quæ aërem ſequitur, quod nunc clarius faciam.

Sit igitur in Figura vigeſima aquæ ductus CADB cylindricus, ut eſſe ſolet, isque totus aquâ plenus, præter particulam *mn*B aëre plenam. Ducantur lineæ horrizontalis & verticalis CH & HB: ponamus brevitatis ergo aëris gravitatem præ gravitate aquæ nullam cenſeri poſſe, ita ut tranſitus aëris per orificium B nihil reſiſtat fluxui aquæ, quamvis de cætero facile foret inertiæ aëris rationem habere, niſi calculi prolixitatem evitare vellemus in re, ubi nullam quærimus præciſionem. Sit longitudo canalis CAD*f* vel CAD*m* (ponimus enim differentiolam *mf* aëre repletam valde parvam) $= \mathfrak{b}$; *mf* vel $ng = \delta$: HB $= a$; amplitudo tubi $= m$, amplitudo orificii B $= n$; Denique demus aquæ, cum ſuperficies eſt in *mn*, nullum eſſe motum, quæſituri alti-

 titu-

titudinem velocitati debitam, quam ſuperficies mn habet, cum pervenit in ſitum fg; ſit iſta altitudo $= v$, erit *aſcenſus potent.* omnis aquæ eo ipſo momento pariter $= v$: *Deſcenſus actualis* autem eſt per §. 7. $=$ tertiæ proportionali ad totam maſſam aquæ, particulam aquæ $mngf$ & altitudinem verticalem HB, id eſt, $= \frac{\delta}{\beta} a$; eſt igitur $v = \frac{\delta}{\beta} a$. Hæc quidem altitudo dicto citius minuitur ſtatim atque aqua per orificium B fluere cogitur, quod demonſtravi §. 18. ſed primo tamen temporis puncto aqua ſervabit motum quem acquiſivit, & ſic guttula orificio proxima ejicietur velocitate, quæ debeatur altitudini $\frac{mm\delta}{nn\beta} a$. Poteſt autem hæc altitudo non ſolum eſſe tripla aut quadrupla ipſius a, ſed & quantumcunque magna: ego certe cum tubis vitreis pro lubitu jactus feci decies aut vigeſies altiores ipſius a; fuerit v. gr. $\delta = 100$ pedum, $\beta =$ uni pollîci, diameter autem tubi decupla diametri, quam orificium habet; & erit $\frac{mm\delta}{nn\beta} = \frac{10000}{1200} a$, ita ut in his circumſtantiis prima guttula aſſilire demta aëris reſiſtentia debeat ad altitudinem plusquam octies majorem altitudine ſolita a. Sunt cœterum multa impedimenta eaque maximi momenti, quæ jactus enormes cohibeant; perditur nempe aliquid de motu ab impulſu ſuperficiei aqueæ mn in latera fg, dein etiam ab ingenti attritu quem aqua per foraminulum, quod parvulum eſſe debet, tam celeriter lata patitur: multum etiam abeſt, quominus aqua C A D m omni ſua celeritate moveatur ob adhæſionem aquæ ad latera tubi, quæ adhæſio in tam longo tractu valde notabilis eſt.

Interim veram hanc eſſe ſolutionem phænomeni nullum poteſt eſſe dubium, iſtique ſolutioni experimenta quæ feci in omni extenſione ſatisfaciunt. Dein hâc theoria etiam recte ſolvitur alterum phænomeni momentum, quod nempe jactus iſte ſit quaſi momentaneus, poſtque breviſſimum tempusculum ad ſenſus non major ſolito: ita in præſenti, quem modo finximus, caſu ſi per regulam §. 18, paullo mutatam (ibi enim de vaſis verticaliter poſitis tantum dicitur) exploremus, quantum aquæ effluere debeat ut jactus non amplius milleſimâ parte (quæ utique obſervari in hujusmodi experimentis minimè poteſt) ſuperet jactum ſolitum, cum ab initio fuerit eodem octies major, invenimus tam parvam eſſe illam quantitatem, ut tempus, quo tota ejicitur, nullo modo percipi poſſit.

Expe-

Experimenta quæ ad Sect. 3. pertinent.

Prænotanda.

PLurima quidem ſunt in hâc Sectione eaque fere præcipua, quæ vix ad experimenta revocari *immediate* poſſunt; Etenim cum Auctores hactenus motum in fluidis effluentibus alium non conſideraverint, quam qui fiunt per foramina valde parva, cumque proin nova ſit theoria quam dedimus pro amplitudinibus foraminum qualibuscunque, hæc ipſa eſt, cujus confirmatio maxime juvaret. At non video, quomodo in Cylindris verticalibus, de quibus potiſſimum egimus, velocitas aquæ effluentis obſervari poſſit, præſertim cum foramen eſt valde amplum (ſecus enim ex tempore depletionis aliquod de velocitatibus judicium ferri poteſt.) Hæc ita perpendens cogitavi demum ſcopo noſtro inſervire poſſe paragraphos 16. & 20. in quorum priore determinata fuit velocitas maxima aquæ effluentis ex cylindris verticaliter poſitis, in altero autem demonſtratum eſt, eundem eſſe motum ex cylindris oblique poſitis & verticalibus, ſi utrobique altitudines verticales ſimiles aſſumantur: Commode igitur utemur cylindris oblique poſitis, ut ex maxima amplitudine jactus aquei poſſit velocitas maxima aquæ ſeu altitudo eidem debita experimento haberi: & hâc quidem ratione accurate velocitas illa maxima, qualis revera eſt, explorari poteſt, etiamſi foramina ſint quantumlibet magna, quæ proin ſi convenire obſervetur cum regulis noſtris, de integra theoria dubium ſupereſſe nullum poterit.

Priusquam vero rem ipſam aggrediar, præmittendum erit theorema mechanicum, quod ſequitur.

Lemma.

Sit AB (Fig. 21.) linea verticalis, BD horizontalis; linea autem AD directionem habeat qualemcunque, ſub cujus directione corpus in A projectum intelligatur, arcum deſcribens parabolium AC, cujus nempe tangens in A eſt recta AD, erit altitudo debita velocitati, qua corpus in A projectum fuit, $= \frac{BC^2 \times AD^2}{4AB.BD.CD}$ atque ſi AD fuerit horizontalis ſive angulus BAD rectus, erit eadem illa altitudo $= \frac{BC^2}{4AB}$. Fig. 21.

Jam vero quæ mihi obſervata fuerint exponam.

De Velocitatibus maximis fluidorum per foramina valde ampla effluentium.

Ad §. 16. & 20.

Experimentum Primum.

Fig. 22. TUbum Cylindricum F A (Fig. 22.) longitudinis quatuor pollicum oblique ad horizontem poſui, in eoque ſitu firmavi, erat autem amplitudo tubi ad amplitudinem luminis in A ut 2 ad 1. & quidem diameter tubi præter propter ſeptem lineas exæquabat; Dein menſuris acceptis in particulis æqualibus linearum F E, A B & B D (quarum lex ex ipſa figura per ſe patet) illas inveni 81. 619. & 740.

His ita præparatis, tubum aquâ replevi, digito interim obturato orificio A, eoque confeſtim remoto aquæ breviſſimo tempuſculo effluxere omnes: obſervare tamen potui, primas & ultimas propius ad verticalem A B, quam medias cecidiſſe; guttas autem longiſſime projectas incidiſſe in locum C invenique poſt ſæpius repetitum experimentum B C particularum, quibus antea uſus fueram, 235.

Jam vero ſi per præmiſſum lemma quæratur altitudo E G, ad quam guttæ maxima velocitate ejectæ aſcendere poſſint, reperitur E G $=$ 56. part. deberet autem vi §. §. 16. & 20. eſſe $=$ 62. niſi attritus aquæ ejusquæ adhæſio ad latera tubi impedimentum motui afferret: majorem conſenſum non expectavi.

II. Poſitis quæ prius, diminuto tantum ad dimidium foramine A, ita ut amplitudo tubi eſſet quadrupla amplitudinis ad lumen pertinentis, obſervavi B C $=$ 252; Hinc deducitur E G $=$ 68 per experimentum; per theoriam autem debuiſſet eſſe $=$ 70; numeri hi minus differunt quam præcedentes, quia hîc multo minus fuit attritus impedimentum ob diminutam velocitatem internæ aquæ. Utrumque autem experimentum egregie profecto theoriam confirmat.

De

De velocitate aquæ ex vaſe ampliſſimo erumpentis.

Ad §. 17.

IN iſto paragrapho dicimus, ſi vas ſit ampliſſimum, aquam mox, poſtquam ſuperficies interna aliquantulum deſcendit, erumpere velocitate, quæ conſtanter reſpondeat altitudini aquæ ſupra foramen. Sinas autem ſub quâcunque directione (neque enim in vaſis ampliſſimis directio venæ quicquam velocitatem mutare poteſt) aquam effluere, & obſerves quocunque temporis puncto, in quanta diſtantia ab verticali vena in horizontem impingat, & exinde per præmiſſam regulam quære altitudinem velocitati aquæ effluentis eo temporis puncto reſpondentem, ſic ſemper iſtam altitudinem invenies æqualem altitudini aquæ ſupra centrum foraminis, ſi modo excipias primas guttulas, quæ vi §. 16. minori velocitate effluere debent & actu effluunt: Neque impedimenta, quorum ſæpius mentionem injecimus, ullam notabilem moram fluxui injicient, ſi modo diameter foraminis duas aut tres lineas minimum exæquet, & diameter ipſius vaſis non ſit infra aliquot pollices, & denique altitudo aquæ nimia non ſit, veluti plurium pedum.

Hæc omnia ſæpe expertus ſum, experimenti autem genus nimis eſt triviale, quam ut prolixe deſcribi mereatur.

De vaſis quæ ſunt Tubis verticalibus inſtructa.

Ad §. 22. & 23.

DE his experimenta ſumſit Cel. s'Graveſande *in Phyſ. Elem. Math.* quæ repetii; ea vero quæ ad rem præſentem faciunt huc potiſſimum redeunt.

In Figuris nempe 23. 24. 25. 26. ſunt ſingulæ aperturæ littera A notatæ, Fig. 23. 24. 25. & 26. inter ſe æquales, ſolâ B exiſtente paullo majore in ratione ut 16 ad 25, amplitudines quoque, ut & altitudines cylindrorum ſunt æquales excepto ultimo, cujus longitudo quadrupla eſt: tubi autem duobus cylindris intermediis annexi, triplam habent longitudinem cylindrorum. His igitur vaſis aqua repletis de ejus effluxu obſervatum fuit.

I. Superficiem aquæ à principio non citius deſcendere in Fig. 23. quam Fig. 24. poſtquam vero utrobique aliquid aquæ effluxit, multo celeriorem fieri

fieri motum in vaſe compoſito quam in ſimplici ; utrumque præmonui in fine §. 23. Res autem melius & accuratius intelligitur ex æquationibus differentialibus, quas §. §. 22. & 23. dedimus, quibus ſi utamur ad prima motuum incrementa invenienda, tam in cylindro ſimplici Fig. 23. quam in compoſito Fig. 24. atque hunc in finem ponamus amplitudines cylindri & tubi eſſe ut m ad n, erit incrementum, quod vocavimus dv in vaſe ſimplici ad incrementum in vaſe compoſito, ut $1 + \frac{3m}{n}$ ad 4, adeoque longe majus in iſto caſu quam in hoc. Si proin primum motum recte percipere liceret, celeriorem ſtatim illum obſervaturi eſſemus, qui fit in Cylindro ſimplici ; Cum vero in §. 15. & 23. porro demonſtratum fuerit, ſuperficiem aquæ, poſtquam paululum deſcendit in utroque vaſe proxime tales eſſe, quæ reſpondeant altitudinibus $\frac{nn}{mm}x$, intelligendo per x altitudines aquæ ſupra orificia, per quæ effluit, ſequitur mox multo majori velocitate aquam deſcendere in Fig. 24. quam Fig. 26. Sic igitur Theoria plane convenit cum obſervatis.

II. Superficiem aqueam non parum velocius deſcendere in Figura 26. quam 24. ita ut velocitas in caſu Fig. 24. ſit quaſi media inter caſus Figuræ 23. & 26. Hic vero rurſus patet, primas quidem accelerationes multo tardius fieri in cylindro Fig. 24. quam 26. Hoc igitur reſpectu ipſa theoria indicat, quod obſervatum fuit ; at certe differentia multum abeſt, ut tanta inde oriri poſſit, quantam expertus fui, neque amplius ſenſibilis eſſe deberet, poſtquam utrobique ſuperficies paullulum deſcendit, per §. 23. debet autem reliquum impedimento tribui, quod ab attritu aquæ in Fig. 24. oritur : aqua enim per tubum A A magna velocitate fertur, ſicque tam ob velocitatem auctam, quam ob amplitudinem vaſis diminutam impedimentum motui aquæ validiſſimum offertur.

III. Denique velociſſime, ſi prima temporis puncta excipias, aqueam ſuperficiem deſcendere in Cylindro Fig. 25. & notanter velocius quam in Fig. 26.

Id vero conforme eſt cum his quæ §. 23. demonſtrata ſunt ; deberent autem mox poſt commune motus initium, poſitis nempe altitudinibus aquæ ſupra orificia effluxus fere æqualibus, velocitates in Figuris 25. & 26. proxime eſſe ut amplitudines orificiorum B & A, id eſt, ut 25. ad 16. & quod minor obſervetur velocitatum differentia, rurſus impedimento frictionis eſt tribuendum præter aliam cauſam in fine §. 25. indicatam.

D-

De iisdem vaſis, quibus tubi horizontales inſeruntur.

Ad §. 24.

CUm aquæ ex vaſe valde amplo veluti C D G (Fig. 19.) per tubum horizontalem G M ampliorem in extremitate N M quam ortu G F fluunt, majori velocitate illas ferri per orificium G F (ſi rurſus excipias primas guttas) quam ſi vel tubus abeſt, vel Cylindricus eſſet. Id etiam Frontinus experientiâ procul dubio edoctus affirmavit, alii vero moderni negarunt.

Igitur operæ pretium duxi rem experimento explorare. Erat autem altitudo vaſis, quo uſus ſum, ſupra axem tubi = 5 $\frac{1}{2}$ *poll. Angl.* longitudo tubi G N = 2 *poll.* 5 *lin.* diameter orificii G F erat = 3, 36. *lin.* diameter aperturæ M N = 5, 48. *lin.* erant proin amplitudines orificiorum ut 3. ad 8 proxime, amplitudo vaſis ſat magna erat, ut infinita cenſeri poſſet præ amplitudine tubi. Volui omnes menſuras allegare, ut quivis experimentum repetere poſſit. Hoc autem vaſe aqua repleto obſervavi amplitudinem jactus, & ex hâc poſtquam omnes menſuras cognoviſſem requiſitas calculum poſui de altitudine, quæ velocitati aquæ transfluentis tum in G F, tum in N M deberetur: hanc inveni proxime undecim linearum, atque proin alteram = *poll.* 6. *lin.* cum duabus nonis lineæ partibus, quas eaſdem altitudines alio etiam experimenti genere inveni. Quoniam autem major eſt altitudo 6. *poll.* cum 6 $\frac{2}{9}$ *lin.* quam 5 $\frac{1}{2}$ *poll.* confirmatur theoria noſtra de acceleratione aquæ internæ ab amplificatione tubi verſus extrema, quamvis multum abſit, ut duabus potiſſimum rationibus §. 25. allegatis inductus præmonui, quin tantum revera acceleretur quantum vi §. 24. remotis obſtaculis, quorum in calculo nulla ratio habita fuit, deberet.

Ad §. 25. Hoc paragrapho in tranſitu monui, multis modis fieri poſſe, ut aër aquæ per tubos fluenti miſceatur. Inde autem futurum, ut aquæ minori copia effluant quidem, ſed non minori velocitate, quod utrumque ut experirer primo in tubis A A & A B (Fig. 24. & 25.) non procul ab eorundem Origine parvulum utrobique feci foramen; factum eſt, ut aquæ per tubos, cum aliquo ſtrepitu ferrentur & turbidæ effluerent, ſuperficies autem ſolito multo lentius deſcenderet; Deinde tubum Figuræ 19. pariter ali-

quantulum perforavi, haud procul à G, rurſusque obſervavi, paullo lentius deſcendere ſuperficiem internam, cujus rei me certum fecit quod numerabam oſcillationes alicujus penduli, quibus ſuperficies per datum ſpatium deſcendit: ratione autem aquarum effluentium vidi aliquando aquas pleno orificio effluere & tunc aquas ſolito minus eſſe pellucidas, jactum autem ordinarium vel ordinario paullo majorem facere; ſæpiſſime autem aquam & aërem juxta ſe ferri, illam in parte tubi inferiore juxta latus F M, hunc in ſuperiori juxta G N & tunc aquas eſſe limpidas atque velocitate ejici ſolito non ſolum haud minori, ſed & multo majori, quod fieri poſſe haud obſcure prævideram. De hâc re in ſequenti Sectione aliud experimentum majori præciſione inſtitutum apponam.

Dabitur autem fortaſſe alibi locus demonſtrandi aquas ſufficienti aëris quantitate permiſtas, ea proxime effluere copia, qua effluerent reſciſſo tubo eo in loco ubi eſt perforatus, cui rei ipſam quoque experentiam reſpondere animadverti.

De canalibus recurvis.

Ad §. 27.

Fig. 27. DUcta in pariete horizontali M N (Fig. 27.) tubum cylindricum C D B totum aquâ plenum, cruraque ambo inter ſe parallela habentem, ita poſui, ut extremitas altera B horizontalem M N raderet, ſimulque crura eſſent verticalia, dum interea orificium C digito obturabam aquæ effluxum ſic compeſcens.

Dein remoto digito obſervavi, altitudinem maximam B P, ad quam aquæ effluentes aſcendebant, aliisque vicibus attendi ad locum E, ad quem deſcendit aquæ ſuperficies; feci autem ſub duabus diverſis circumſtantiis experimentum; primo enim loco nullum in B poſueram operculum; deinde operculum adhibui tali lumine perforatum, quod amplitudinem haberet ratione amplitudinis tubi ut 1. ad $\sqrt{2}$. Interim menſuræ tales fuere: C A $= 345$; A D B $= 530$; B P $= 33$; & A E $= 88$. particulis, quarum 375 longitudinem Pedis Lond. exæquabant. Hæc ita fuere in caſu priori, in altero autem manentibus reliquis vidi B P $= 64$ & A E $= 54$. Notabo hîc in tranſitu, quod alio explorare cupiens modo maximum deſcenſum A E, poſt finitum experimentum inclinaverim tubum, donec aqua jam jam effluxui per B proxima

xima videbatur, quo temporis puncto diſtantiam menſuravi ſuperficiei à loco A antea notato; diſtantia illa, quam eandem cum maximo deſcenſu A E fore putabam, opinione longe minor fuit; unde edoctus fui partem aquæ, quæ in experimento jam per B effluxerat, tubum rurſus ingreſſam fuiſſe.

His ita obſervatis, magnitudines B P & A E calculo quæſivi ad normam §. 27. ponendo m primo $= n$ deinde $mm = 2nn$, inveni autem in caſu priore B P $=$ 79. quæ in experimento non ſuperavit 33. maximumque deſcenſum A E proxime reperi $=$ 250. quem experimentum dedit 88. dein pro caſu $mm = 2nn$ oritur B P præter propter dupla illius, quæ obſervata fuit & A E $=$ 186. quæ 54. particularum obſervata fuit.

Enormes has differentias maxima ex parte adhæſioni aquæ ad latera tubi tribuo, quæ certe adhæſio in hujusmodi caſibus incredibilem exercere poteſt effectum, uſus enim ſum tubo vix ultra duas lineas in diametro habentem, majorem utique conſenſum experturus cum tubo ampliore. Interim veriſimile eſt, curvaturam tubi in parte inferiore, aliquid etiam motui derogare.

Ad §. 28. Eodem tubo recurvo, quem modo deſcripſi, uſus ſum: operculum autem poſui in B minimo foramine pertuſum: feci ut totus aquâ eſſet plenus præter particulam F G B, in quo ſitu aquam detinui ope digiti orificio C appoſiti. Remoto digito deſcendit aqua, & cum perveniſſet in ſitum H D B, guttulæ aliquot tanto impetu per foraminulum in B fuerunt veluti exploſæ, ut ad altitudinem plusquam decem pedum aſcenderint, quamvis altitudo H A altitudinem dimidii pedis vix ſuperaret. Interim ob exiguitatem foraminuli tantam reſiſtentiam offendit aqua dum tranſiret orificium, ut fracto impetu aqua non ſolum non ad altitudinem A H aſcenderit (ſupra quam tamen remotis omnibus impedimentis aſſilire paullulum continue debuiſſet) ſed vix guttula una aut altera notabili temporis mora fuerit expreſſa, ita ut mihi perſuadeam, ſi absque impetu ſola aquæ preſſione naturali tantus jactus producendus fuiſſet, id fieri non potuiſſe niſi altitudine minimum centum pedum.

Dein etiam obſervavi jactum aquæ diminui eo magis quo minus ante experimentum relinquitur ſpatium G B; quæ omnia theoriæ ſunt conformia. Menſuras ſuperfluum fuiſſet ſumere, quia ob nimia impedimenta tantus eſſe utique nequit jactus aquæ, quantus illis remotis futurus fuiſſet. Attamen ut & has convenire cum formulis experimento confirmarem, tubum C D B ſumſi ampliorem, ut impedimenta adhæſionis maxima parte auferrem, pars

DFB parvula erat, minorque etiam pars GB, quam in experimento ab aqua relinquebam vacuam : ac denique operculum foramine non admodum parvo erat pertuſum. Et tunc vidi ſaltum non multum admodum defeciſſe ab altitudine $\frac{mm\delta}{nn\zeta}a$, quam §. 28. pro hoc negotio dedi, imo memini me præſenti Amico altitudinem ſaltus recte prædixiſſe, poſtquam perpendiſſem, quantum in calculo præter propter impedimentis eſſet dandum.

Similem aquæ exploſionem *momentaneam* eamque à ſimili cauſa oriundam facillime obtinebis cum fontibus, qui aquas per fiſtulam pleno orificio ejiciunt. Si enim digitum orificio fiſtulæ ſubito ita apponas, ut pars orificii aperta maneat, protinus aquas magno impetu expelli videbis, moxque tenue aquæ filum intra priſtinos velocitatis limites reduci. Obſervabis etiam aquas eò majori impetu atque longius projici quo minus digito relinquas foramen, atque pro eodem relicto foramine, jactum inſolitum eò magis protrahi (utut ſemper breviſſimum) fierique oculis ſenſibiliorem, quo longior eſt fiſtula, ita ut in fontibus ſalientibus, ad quos aquæ ex caſtello per longiſſimos canales feruntur, ſi canales non eſſent admodum ampli & aquæ pleno effluerent orificio, non dubito quin ſic per notabile temporis ſpatium vehemens aquæ jactus protrahi poſſet, gradatim ad ſolitam velocitatem rediturus: Hæc omnia conformia ſunt cum iis, quæ §.§. 28. & 18. monita fuerunt.

Experimentum hoc me aliquando & prima quidem vice feciſſe memini coram V. V. Cel. D. D. De Maupertuis & Clairaut, cum quibus antea in ſermonem de rebus iſtis aquariis forte delapſus eram. Quamvis autem hic nullus ſit aër, qui accuſari poſſit, revera tamen phænomenon iſtud ab eo, quod D. de la Hire obſervatum fuit, non differt, & utrumque ab eo provenit, quod motus aquæ in canali contentæ, vel ſaltem motus iſtius pars perire non poſſit, ſine ullo inde proveniente effectu, quem ipſe enormis aquarum jactus conſtituit.

HYDRO-

HYDRODYNAMICÆ
SECTIO QUARTA.

De variis temporibus, quæ in effluxu aquarum deſiderari poſſunt.

§. I.

RES videbitur multis omnino Geometrica, quæ ſcilicet nulla conſideratione phyſica opus habeat, ut, cum aquæ ex dato vaſe per lumen cognitum velocitatibus in omni ſitu determinatis effluunt, tempus definiatur, quo data effluat aquæ quantitas. Attamen experientia contrarium docet; nam multo minori quantitate aquæ effluunt per foramina, quæ ſunt in lamina tenui, quam ex ſimplici velocitatum conſideratione ſequeretur, idque plerumque (nec enim res ſibi conſtat in diverſis circumſtantiis) in ratione ut 1 ad $\sqrt{2}$; movit hoc Newtonum, ut affirmaret in prima *Princ. math.* editione aquam ex vaſe ea effluere velocitate, quæ generetur altitudine dimidia aquæ ſupra foramen, cui opinioni omnia experimenta de velocitatibus immediate ſumta, contradicunt. Explorans poſtmodum ipſe magnus Vir hujus contradictionis originem, eam poſitam eſſe obſervavit in contractione venæ aqueæ, quæ contractio mox præ foramine fieri ſolet. Alia quoque mihi obſervata fuit venæ mutatio priori nunc ſimilis nunc contraria. Nempe cum aquæ non per ſimplex foramen, verum per tubulum effluunt, rurſus contrahitur vena, ſi tubus exteriora verſus convergit, ſed dilatatur ſi idem divergit. De contractione venæ aqueæ per tubos convergentes effluentis accuratiſſima ſumſit experimenta Joh. Polenus in libro de *caſtellis* p. 15. & ſeqq. contractio venæ eo major à Viro Celeberrimo obſervata fuit, quo amplius erat orificium tubi conici internum manentibus orificio externo atque longitudine tubi, quæ ratio eſt, quod ſimilis aquæ quantitas ceteris paribus eò tardius effluxerit, quò amplius fuerit orificium internum, quamvis impedimenta ab adhæſione aquæ ad latera

ra tubi minorem continue habuerit effectum: fecerunt autem iſtæ impedimentorum diminutiones, ut aquæ majori velocitate in loco, quo vena maxime erat contracta, fluerent, & nihilominus parcius erogarentur: verum id eſſe colligitur ex obſervatis effluxus temporibus & venarum, ubi maxime contrahuntur, amplitudinibus. Igitur cum in hiſce venæ mutationibus cardo rei vertatur, è re erit phænomena uberius examinare & explicare.

§. 2. Aſſumamus v. gr. cylindrum verticalem, qui in medio fundi horizontaliter poſiti, habeat foramen, aqua autem interna diviſa concipiatur in ſtrata horizontalia: His ita poſitis, cenſuimus motum cujusvis ſtrati eundem eſſe & talem quidem, ut ſitus horizontalis in illis conſervetur, ubi tamen monui, non poſſe hanc hypotheſin extendi ad ſtrata foramini proxima, quoniam vero inde nullus error ſenſibilis oriri poſſit ratione velocitatis aquarum effluentium, operæ pretium non eſſe, ut ejus rei ratio habeatur. Nunc vero, quando alia phænomena à motu aquæ internæ obliquo, qualis præſertim in prædictis ſtratis foramini proximis eſt, pendent, hunc paucis luſtrabimus.

§ 3. Mihi autem videtur motum aquæ internæ talem eſſe concipiendum, qualis foret ſi aqua ferretur per tubulos infinitos juxta ſe poſitos, quorum intermedii proxime rectà à ſuperficie verſus foramen deſcendunt, reliquis ſenſim ſe incurvantibus prope foramen, uti Fig. 28. *a* oſtendit, ex quâ apparet, ſingulas particulas hoc modo deſcendere motu tantum non verticali, donec fundum prope attingant, eaſque tunc curſum ſuum ſenſim verſus foramen inflectere, ita ut particulæ fundo proximæ motu fere horizontali, alteræ magis verticaliter ad foramen effluant. Hujuſmodi motus ſæpe oculis obſervare potui, cum particulæ ceræ, quam vocant Hiſpanicæ, innatabant aquæ. Exinde autem intelligitur non poſſe ſingulas particulas foramini adſtantes directionem ſuam integram ſervare, neque tamen ita eam inflectere, ut motum axi plane parallelum aſſumant, ſed fore potius, ut vena aquæ effluentis contrahatur uſque in *d e*, ubi ſic notabiliter gracilior erit, quam in ortu circa foramen *a c*. Hæc autem contractio venæ verticaliter fluentis non confundenda eſt cum alia contractione, quæ fit ab acceleratione aquæ. Dein patet quoque, quod cum ſingularum particularum foramini adſtantium diverſa ſit directio, neceſſario ab impetu, quem in ſe mutuo faciunt eædem particulæ, vena com-

Fig. 28. *a*.

pri-

primatur, atque ſic gracileſcat. Et ab iſta compreſſione fit, quod alias contradictionem involveret, ut aqua jam jam egreſſa, etiamnum præ foramine acceleretur, & ſic *aſcenſus potentialis* creſcat, etiamſi ad alteram accelerationem omnibus corporibus cadentibus communem non attendamus, ceu huc non pertinentem, & cujus deinceps mentionem non faciemus. Hæc autem niſi me fallat opinio, res erit porro hunc in modum tractanda.

(I.) Eouſque vena aquæ conſideranda eſt, donec particularum velocitates amplius non mutentur, quod quamvis nunquam fiat omni rigore, attamen non procul à foramine fieri cenſendum eſt, veluti in *de*. Hoc autem ſi ita fuerit & aquæ ex vaſe A B C D per foramen *ac* effluere ponantur, erit loco vaſis ſimplicis A B C D concipiendum aliud compoſitum A B *adec* C D.

Quicquid igitur in præcedente ſectione præmiſſum fuit, pro determinandis ubique velocitatibus, id omnino locum habebit, ſi loco vaſis ſubjecti concipiatur vas, quod dixi tubulo contracto inſtructum. Nec tamen hæc correctio, ratione præmiſſæ noſtræ methodi velocitatum aquæ effluentis determinandarum, ſenſibilem mutationem producere poteſt ob brevitatem tubuli *adce*, poteſt autem valde notabilem ratione quantitatis, quia aquæ non tam per orificium *ac*, quam per *de* effluere cenſendæ ſunt.

(II.) Sic erunt velocitates in diverſis locis ipſius venæ reciproce ut amplitudines ſectionum reſpondentium & cum in vaſis ampliſſimis velocitas in *de* talis ſit quæ toti altitudini aquæ conveniat, ſimulque experimentis conſtet, amplitudines *ac* & *de* proxime eſſe ut $\sqrt{2}$ ad 1, putavit Newtonus ſic confirmari poſſe theoriam ſuam, qua ſtatuit aquam ex foramine vero velocitate effluere quæ debeatur dimidiæ altitudini aquæ ſupra foramen, quamvis in progreſſu velocitas aquæ creſcat: quâ in re mihi videtur nimium adhæſiſſe præconceptæ opinioni: neque enim ratio orificii *ac* ad *de* ſemper eadem eſt, neque ſic explicari poteſt motus aquarum ex vaſe, cui tubulus adhæret: verbo! attenuatio venæ prorſus accidentalis eſt, poteſt enim tota impediri, apponendo foramini parvulum tubulum cylindricum vel augendo tantum craſſitiem laminæ, cui foramen ineſt, & tunc ſine ulla correctione locum habent tam ra-

tione

tione velocitatum quam quantitatum theoremata, quæ in præcedente ſectione exhibita fuerunt.

(III.) Patet autem ex ipſa explicatione ſupra data de *contractione venæ*, non poſſe non illam à diverſis circumſtantiis mutari; ita experimenta docent, diminui eandem ab auctâ laterum foraminis craſſitie: an altitudo aquæ ſupra foramen aliquid conferat non ſatis ſcio: crediderim fere creſcere aliquantulum contractionem ab aucta altitudine aquæ internæ, quamvis facile parum id fore prævideam: veriſimile quoque eſt, eo minorem cæteris paribus fore contractionem venæ, præſertim verticalis, quo majorem rationem habuerit amplitudo foraminis ad amplitudinem cylindri, quia motus aquæ internæ fundo proximæ eo minus fit obliquus, ita ut ſi foramen totam amplitudinem cylindri occupet, nulla utique attenuatio venæ aqueæ oriri poſſit. Ad hoc animum advertant velim, qui hujus contractionis in ipſa velocitatum determinatione rationem habendam eſſe fortaſſe cogitabunt. Cum enim foramen non multo minus eſt amplitudine vaſis, nulla oriri poteſt contractio notabilis & cum foramen eſt parvum, nulla rurſus oritur fere differentia circa velocitates ſive foramen aliquantum augeatur ſive diminuatur.

§. 4. Eadem propemodum ratio eſt aquarum horizontaliter, ut de aliis directionibus taceam, effluentium: nam ſimili modo ab omni parte affluet aqua ad foramen; imo etiam ex inferiori parte aſcendet uſque ad foramen ut effluere poſſit, quod ipſe ſæpe fieri obſervavi. Simili igitur cauſa ſimilis fiet in vena effluente attenuatio, quam eo facilius eſt oculis perſpicere, quod hîc locum non habeat altera atteuuatio ab acceleratione aquæ jam egreſſæ oriunda. Et ob hanc rationem, ſi quis obſervationes circa contractionem venæ facere inſtituat, is meo judicio melius faciet, utendo venis horizontaliter, quam ſub aliâ directione effluentibus.

§. 5. Quanta autem ſit contractio, id eſt, quænam ratio intercedat inter amplitudinem orificii ſectionemque venæ horizontaliter effluentis minimam experiri licet vel ſumendo actu menſuras diametrorum iſtis amplitudinibus reſpondentium, vel etiam mediante quantitate aquæ dato tempore, datisque velocitatibus effluentis, ubi tamen velocitates non tam ex altitudine aquæ ſupra foramen, quam ex amplitudine jactus deducenda erunt, quando-

qui-

quidem impedimenta nunc majora nunc minora nunquam omnem aquæ velocitatem permittant, quam vi theoriæ, qua horum impedimentorum ratio nulla habetur, acquirere deberet.

§. 6. Ex præmiſſis nunc ſatis patere puto perfectum conſenſum fore inter quantitatem aquæ effluentis ejuſque velocitatem, ſi modo foramini, quod eſt in vaſe, ſubſtituatur aliud foramen eo uſque diminutum, donec ſectionem venæ maxime contractæ non ſuperet: atque perinde erit, in quonam venæ loco, aut in quânam profunditate à ſuperficie aquæ foramen hoc eſſe conſtituatur, ſive in ac ſive in de, quandoquidem velocitates ſemper proxime reſpondebunt toti altitudini aquæ ſupra eum locum, quo foramen fingitur: amplitudinem hujus foraminis mente concipiendi vocabo deinceps *Sectionem venæ aqueæ contractæ.*

§. 7. Quod ſi jam *Sectio* iſta, de quâ modo diximus, conſtantem haberet rationem ad orificium, in eadem ratione diminuendum cogitatione foret foramen effluxus, poſtmodumque calculus de quantitate aquæ dato tempore effluentis inſtituendus. Ita nempe poſita iſta ratione $= \frac{1}{\alpha}$ nominatâque amplitudine orificii n, cenſenda eſſet *Sectio venæ ſolidæ* $= \frac{n}{\alpha}$.

At variabilis cum ſit ſub diverſis circumſtantiis, regulas in hanc rem *à priori* dare non licet: mutatur autem maxime à craſſitie laminæ, in quâ foramen eſt, aucta vel diminuta: aliquid etiam, quamvis id parum, conferre poteſt magnitudo foraminis, amplitudines vaſis, hæque tam abſolutæ, quam relativæ, ut & fortaſſe altitudo aquæ ſupra foramen. Interim aſſumtis lamina tenui, vaſe ampliſſimo, foramine ad 4. vel 6. lineas in diametro aſſurgente; ſolet ratio inter foramen & *Sectionem venæ contractæ* non multum recedere ab illâ, quam Newtonus ſtatuit, nempe ut $\sqrt{2}$ ad 1. Sæpe autem ab aliis major obſervata fuit, atque ab aliis etiam minor.

§. 8. Quæcunque vero ſit, in quolibet caſu illam indicabimus, ut ante, per $\frac{\alpha}{1}$. Huicque poſitioni nunc calculum pro temporibus ſuperinſtruemus; brevitatis autem gratia conſiderabimus tantum vaſa cylindrica, atque in his duo potiſſimum examinabimus temporum genera; primum quod punctum maximæ velocitatis definit, alterum, quod depletioni reſpondet. In utroque vero caſu motum à quiete incipere ponemus.

§. 9. Fuerit igitur vas cylindricum verticaliter poſitum aqua plenum, ſitque altitudo aquæ ab initio fluxus $= a$, amplitudo cylindri $= m$, amplitudo foraminis $= n$, *Sectio venæ ſolidæ* $= \frac{n}{\alpha}$ effluxerit jam aqua per tempus t; ſitque tunc altitudo aquæ reſidua ſupra foramen $= x$, eodemque temporis puncto habeat ſuperficies aquæ internæ velocitatem, quæ reſpondeat altitudini v: erit velocitas ipſa $= \sqrt{v}$, eſt autem elementum temporis dt proportionale elemento ſpatii $-dx$ diviſo per velocitatem $\sqrt{v}$, unde $dt = \frac{-dx}{\sqrt{v}}$.

Determinatus equidem fuit valor ipſius v in *ſect.* 3. ubi iiſdem denominationibus uſi ſumus, quibus nunc utimur. At quoniam pro recta aquarum erogatarum menſura requiritur, ut foramini n ſubſtituatur *ſectio venæ contractæ* $\frac{n}{\alpha}$, ſequitur, ut in valore ipſius v eadem fiat ſubſtitutio atque ſic ſtatuatur $v = \frac{nna}{2nn - mm\alpha\alpha}\left(\left(\frac{a}{x}\right)^{1 - \frac{mm\alpha\alpha}{nn}} - \frac{x}{a}\right)$

Hic vero valor ſi ſubſtituatur in æquatione

$$dt = -\frac{dx}{\sqrt{v}}, \text{ oritur}$$

$$dt = -dx : \sqrt{\left[\frac{nna}{2nn - mm\alpha\alpha}\left(\left(\frac{a}{x}\right)^{1 - \frac{mm\alpha\alpha}{nn}} - \frac{x}{a}\right)\right]}$$

ope cujus æquationis omnia tempora deſiderata definiri poſſunt per approximationes, ſeu ſeries, ſi modo in ſingulis punctis valor ipſius α innoteſcat: Aſſumemus autem eſſe illum conſtantis valoris, quandoquidem in præſenti caſu nihil ſit, à quo mutari poſſit præter diverſas altitudines & velocitates fluidi, quæ parum vel nihil quantum ſenſibus percipi poteſt ad id negotii conferunt.

§. 10. Jam ut æquatio deſiderata per ſeries exhiberi poſſit, conſiderabimus quantitatem.

$$1 : \sqrt{\left[\frac{nna}{2nn - mm\alpha\alpha}\left(\left(\frac{a}{x}\right)^{1 - \frac{mm\alpha\alpha}{nn}} - \frac{x}{a}\right)\right]} \text{ ſub hâc forma}$$

$$\left(\frac{nnx}{mm\alpha\alpha - 2nn}\right)^{-\frac{1}{2}} \times \left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{mm\alpha\alpha}{nn} - 2}\right)^{-\frac{1}{2}} \text{ factoremque}$$

po-

poſteriorem per regulas ſolitas reſolvemus in hanc ſeriem

$$1+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{mm\alpha\alpha}{nn}-2}+\frac{1.3}{1.2.4}\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2mm\alpha\alpha}{nn}-4}+\frac{1.3.5}{1.2.3.8}\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{3mm\alpha\alpha}{nn}-6}$$

+ &c. unde nunc habetur mutata paullulum æquationis forma :

$$dt=-\frac{dx\sqrt{mm\alpha\alpha-2nn}}{n\sqrt{a}}\times\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{mm\alpha\alpha}{nn}-\frac{5}{2}}\right.$$

$$\left.+\frac{1.3}{1.2.4}\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2mm\alpha\alpha}{nn}-\frac{9}{2}}+\frac{1.3.5}{1.2.3.8}\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{3mm\alpha\alpha}{nn}-\frac{13}{2}}+\&c.\right]$$

Hæc æquatio ita eſt integranda, ut poſita $x=a$ fiat $t=o$; ſic autem oritur

$$t=\left[2+\frac{nn}{2mm\alpha\alpha-3nn}+\frac{3nn}{16mm\alpha\alpha-28nn}+\&c.\right]\times\frac{\sqrt{(mm\alpha\alpha-2nn).a}}{n}$$

$$-\left[2\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{nn}{2mm\alpha\alpha-3nn}\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{mm\alpha\alpha}{nn}-\frac{3}{2}}\right.$$

$$\left.+\frac{3nn}{16mm\alpha\alpha-28nn}\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2mm\alpha\alpha}{nn}-\frac{7}{2}}+\&c.\right]\times$$

$$\times\frac{\sqrt{(mm\alpha\alpha-2nn).a}}{n},$$

ubi $2\sqrt{a}$ exprimit tempus quod corpus impendit dum libere delabitur per altitudinem a. Si vero in iſta æquatione ponatur

$$x=a:\left(\frac{mm\alpha\alpha-nn}{nn}\right)^{nn:(mm\alpha\alpha-2nn)}$$

quæ eſt altitudo aquæ cum velocitas maxima eſt (per §. 16. *ſect.* 3. & §. 8. *ſect.* 4.), tum obtinetur tempus quod à fluxus principio ad punctum maximæ velocitatis usque præterit; & cum ponitur $x=o$, oritur tempus, quo vas totum depletur, ac denique ſi ponatur $x=$ cuicunque quantitati c, exprimet t tempus quod ſuperficies inſumit in deſcenſum per altitudinem $a-c$; Videbimus autem pro his caſibus, quid fieri debeat, cum vas eſt valde amplum, numerusque m alterum n ſic pluries continet.

§. 11. Fuerit primo $\frac{m}{n}$ numerus infinitus, erit altitudo aquæ puncto maximæ velocitatis reſpondens ſeu

$$a:\left(\frac{mm\alpha\alpha - nn}{nn}\right)^{nn:(mm\alpha\alpha - 2nn)} = a:\left(\frac{mm\alpha\alpha}{nn}\right)^{nn:mm\alpha\alpha}$$

quoniam autem $\frac{mm\alpha\alpha}{nn}$ eſt numerus infinitus, poterit cenſeri:

$$\left(\frac{mm\alpha\alpha}{nn}\right)^{nn:mm\alpha\alpha} = 1 + \left(log.\frac{mm\alpha\alpha}{nn}\right):\frac{mm\alpha\alpha}{nn};$$

cujus rei demonſtratio talis eſt: propoſita ſit quantitas infinita A habeaturq; ut in noſtro exemplo $A^{1:A}$, facile quisque videt eſſe hanc quantitatem paullo majorem, quam eſt unitas, & quidem exceſſu infinite parvo, quem vocabimus z; habetur itaque $A^{1:A} = 1 + z$, ſumantur utrobique logarithmi & erit $\frac{log.A}{A} = log.(1+z) =$ (ob infinitè parvum valorem ipſius z) z; Igitur eſt $A^{1:A} = 1 + \frac{log.A}{A}$: proindeque ſimiliter eſt, ut diximus,

$$\left(\frac{mm\alpha\alpha}{nn}\right)^{nn:mm\alpha\alpha} = 1 + \left(log.\frac{mm\alpha\alpha}{nn}\right):\frac{mm\alpha\alpha}{nn}$$

Porro quia quantitas hæc unitati addita eſt infinitè parva, erit

$$a:\left(\frac{mm\alpha\alpha}{nn}\right)^{nn:mm\alpha\alpha} \text{ ſeu}$$

$$a:\left[1 + \left(log.\frac{mm\alpha\alpha}{nn}\right):\frac{mm\alpha\alpha}{nn}\right] = a - a\left(log.\frac{mm\alpha\alpha}{nn}\right):\frac{mm\alpha\alpha}{nn}:$$

eſt igitur ſpatium per quod ſuperficies aquæ deſcendit, dum à quiete maxima oritur velocitas $= a\left(log.\frac{mm\alpha\alpha}{nn}\right):\frac{mm\alpha\alpha}{nn}$, ſeu $= \frac{2nna}{mm\alpha\alpha}\, log.\frac{m\alpha}{n}$.

Indicat hæc æquatio deſcenſum aquæ in vaſe infinite amplo infinite parvum eſſe, cum aqua jam maximum velocitatis gradum attigerit: Potuiſſet autem hoc non obſtante dubitari, an non interea quantitas aquæ finita effluat, quandoquidem cylindrus ſuper baſi infinita erectus, utut altitudinis infinite parvæ magnitudinem poſſit habere infinitam: at ſequitur ex noſtra æquatione, hanc quoque quantitatem infinite parvam eſſe, & nominatim æqualem $\frac{2nna}{m\alpha\alpha}\, log.\frac{m\alpha}{n}$.

Atque convenit hoc egregie profecto cum phænomenis, quæ in effluxu aquarum ex caſtellis per ſimplex foramen toto die experimur. Cum enim

enim foramen digito obturamus, moxque remoto digito aquas horizontaliter effluere ſinimus, nullam guttulam in terram delapſam obſervamus mediam inter jactum longiſſimum & locum, qui foramini ad perpendiculum reſpondeat.

§. 12. Prouti in proximo paragrapho determinavimus quantitates utut infinite parvas, deſcenſus aquæ internæ uti & effluentis aquæ dum maximum velocitatis gradum aqua attingit, ita nunc idem præſtabimus ratione tempusculi. Dico eutem ſufficere in æquatione §. 10. tempus exprimente, ut in utraque ſerie unicus accipiatur terminus primus, quod apparebit cum quis calculum ad duos extenderit terminos: eſt igitur tempuſculum quæſitum ſive

$$t = \left(2 - 2\sqrt{\frac{x}{a}}\right) \times \frac{\sqrt{(mm\alpha\alpha - 2nn).a}}{n}$$

hinc poſito pro x valore huc pertinente, qui in præcedente paragrapho fuit definitus, fit

$$t = \left[2 - 2\sqrt{1 - \left(log.\frac{mm\alpha\alpha}{nn}\right) : \frac{mm\alpha\alpha}{nn}}\right] \times \sqrt{\left(\frac{mm\alpha\alpha - 2nn}{nn}\right).a}$$

vel poſito $1 - \left(log.\frac{mm\alpha\alpha}{nn}\right) : \frac{2mm\alpha\alpha}{nn}$ pro reſpondente quantitate ſigno radicali involuta prodit

$$t = \left[\left(log.\frac{mm\alpha\alpha}{nn}\right) : \frac{mm\alpha\alpha}{nn}\right] \times \sqrt{\left(\frac{mm\alpha\alpha - 2nn}{nn}\right).a}$$

aut denique rejecta quantitate $2nn$ in ſigno radicali, oritur $t = \frac{2n\sqrt{a}}{m\alpha}.log.\frac{m\alpha}{n}$.

Eſt autem hoc tempusculum infinite parvum, quia, ut notum eſt, logarithmus quantitatis infinitæ infinities minor eſt ipſâ quantitate. At vero cum ſic ſtatim ab initio fluxus, aqua maxima ſua velocitate expellitur, mirum prima fronte videbitur fortaſſe aliquibus, motum in inſtanti generari finitum: nemo tamen abſurdum putabit, maſſam infinitam, cujusmodi eſt quantitas aquæ in vaſe infinito contentæ, poſſe tempuſculo infinitè parvo motum producere finitum, idque ſolâ gravitatis actione.

§. 13. Si præterea in iſta vaſis infinite ampli poſitione tempus depletionis, quod utique infinitum erit, exprimere velimus, erit, ut ſupra indi-

catum fuit, in æquatione paragraphi decimi ponendum $x = o$, ſimulque ſolus primus ſeriei terminus adhibendus rurſusque ponendum $m\alpha$ pro $\sqrt{(mm\alpha\alpha - 2nn)}$; atque ſic fit

$$t = \frac{2m\alpha}{n}\sqrt{a}.$$

Tum denique tempus, quod impenditur in deſcenſum ſuperficiei per altitudinem $a - c$ exprimetur in ſimili hypotheſi hac æquatione

$$t = \frac{2m\alpha}{n}(\sqrt{a} - \sqrt{c}).$$

§. 14. Præmiſſæ æquationes non accurate quidem, proxime tamen ſatisfacient, cum vas non infinitæ, permagnæ tamen amplitudinis eſt: imo non multum admodum deficient, cum numerus m vel mediocriter ſuperat numerum n. Liceat quædam hic verba adjicere circa experimentum quod in fine paragraphi undecimi indicavi, deturque hæc venia inſtituto noſtro, quod in phænomenis motuum experientia cognitis potiſſimum verſatur illuſtrandis examinandisque. Dixi autem in citato paragrapho cum aqua horizontaliter effluit, primam guttulam totam ſtatim obtinere amplitudinem jactus; atque idem hoc quidem indicat theoria pro vaſis ampliſſimis; at vero in vaſis mediocriter amplis, quædam guttulæ minori impetu effluere deberent, priusquam punctum maximæ velocitatis adſit, hæque guttulæ incidere deberent in locum aliquem medium inter maximum jactum & punctum, quod foramini verticaliter reſpondet; atque hoc etiam ita fieri obſervavi, ex vaſis amplitudinis veluti decies foramine majoris. Verum cum experimentum aliquando ſumerem de vaſe pedem dimidium alto, quod amplitudinem præter propter centuplam haberet foraminis, ne minima quidem particula aquæ, quantum videre potui, notabiliter à jactu aquæ pleno defecit. Videamus itaque quænam aquæ quantitas in hoc caſu effluere deberet ante punctum maximæ velocitatis; erit autem tanta, quantam continet cylindrus ejusdem amplitudinis in altitudine

$$a - a : \left(\frac{mm\alpha\alpha - nn}{nn}\right)^{nn:(mm\alpha\alpha - 2nn)}$$

(*vid.* §. 10. *ſub. fin.*); nec differt fere hæc minima altitudo ab hac multo compendioſiori, nempe $\frac{2nna}{mm\alpha\alpha}$ *log.* $\frac{m\alpha}{n}$ (*vid.* §. 11.) ubi nunc per $\frac{n}{m}$ intelligitur

tur $\frac{1}{100}$ & per a pes dimidius, dum pro α ſubſtitui poteſt $\sqrt{2}$. (non deſideramus enim hic ſummam accurationem) & per *log.* indicatur logarithmus hyperbolicus, ita vero fit,

$$\frac{2nna}{mm\alpha\alpha} \, log. \frac{m\alpha}{n} = \frac{1}{20000} (log. \, 100. + \tfrac{1}{2} \, log. \, 2.) =$$

0, 0002475 *ped.* ſeu, 0, 000297 *poll.* & quoniam amplitudinem vaſis æqualem inveneram $6\frac{1}{5}$ *poll.* quadratis, intellexi quantitatem aquæ quæſitam, quæ nempe effluere debuiſſet priusquam jactus maximus oriretur, exæquare circiter partem quinquageſimam ſecundam unius pollicis cubici, ſeu, poſito guttam mediocrem ſex lineas cubicas efficere, plusquam quinque guttas. In experimento autem nullam obſervavi, cujus rei rationem eſſe ſuſpicor, quod primæ guttulæ, quamvis jam ejectæ ab aqua ſubſequente tamen etiamnum propellantur; nimis enim celeriter alteræ ſubſequuntur, quam ut primæ ab illis interea divelli poſſint. Huc autem facit, quod tempusculum à fluxus initio ad maximam expulſionem usque (quod nempe per §. 13. eſt proxime $= \frac{2n\sqrt{a}}{m\alpha} \, log. \frac{m\alpha}{n}$, ubi per $2\sqrt{a}$ hic intelligitur tempus, quo corpus per altitudinem dimidii pedis labitur, id eſt, circiter $\frac{2}{11}$ unius minuti ſecundi) quod inquam tempuſculum illud non ultra partem centeſimam quinquageſimam octavam unius minuti ſecundi excurrat.

Fortaſſe aliquid contribuit, quod non poſſit digitus ſat celeriter à foramine removeri. Præſertim vero huc pertinet, quod maxima pars illius aquæ, quæ ante præſentem maximam velocitatem erumpit, ita ad maximam jactum accedat, ut nulla differentia obſervari poſſit & ſic vix unica guttula notabili diſcrimine ab illo defectura fuiſſet, ſi ſe libere ab aqua ſubſequente ſeparare potuiſſet.

§. 15. Hactenus de aquis per foramina effluentibus: progrediamur nunc ad effluxum aquarum ex vaſis per conos ſeu convergentes ſeu divergentes. Quod ſi autem aquæ effluant per tubum convergentem, dictat eadem ratio à motu particularum convergente petita §. 3. pro foraminibus ſimplicibus expoſita, fore ut aquæ vena præ foramine contrahatur etiamnum ejusque particulæ accelerentur & ſic quantitas aquæ dato tempore effluentis minor ſit quam menſuræ orificii effluxus & velocitatum, nulla habita ratione ad contractionem venæ, indicant. Parva autem ſolet

eſſe

eſſe iſta contractio in tubis longioribus. In tubis divergentibus omnia fiunt modo contrario: dilatatur enim vena præ foramine; aquæ motus retardatur & major aquæ quantitas dato tempore effluit, quam ſine iſta dilatatione ſequeretur ex obſervatis amplitudine orificii & velocitatibus aquæ per illud effluentis. Ex tubis denique cylindricis effluens vena aquea nec contrahitur nec dilatatur.

Probe eſt itaque attendendum ad has ſive contractiones ſive dilatationes in æſtimandis quantitatibus aquæ dato tempore effluentis, quam quæſtionem obiter tractabimus in fine ſectionis.

Nunc autem libet examini ſubjicere mutationes quæ in effluxus aquarum ſuccedunt ab initio motus. In his vero compendii cauſa non attendemus ad mutationes venæ; neque enim res ita eſt comparata ut poſſit experimentis ſatis accurate confirmari neque magni momenti hic ſunt præfatæ mutationes; res autem ipſa digna eſt, quæ ſollicite perquiratur ut ejus natura animo recte intelligi poſſit.

De vaſis, quæ tubos habent annexos, jamjam egimus in ſuperiori ſectiones §. 31. §. 32. §. 33. & quidem paragrapho 31. æquationes dedimus generaliores, quæcunque fuerit ratio inter amplitudines vaſis & tubi: ſed nimis ſunt perplexæ calculumque poſtulant admodum operoſum: In paragrapho, qui hunc ſequitur, hypotheſin pertractavi, quæ vas ubique amplitudinis infinitæ ratione tubi facit, in qua hypotheſi dixi, aquam effluere velocitate, qua ad integram altitudinem aquæ ſupra orificium effluxus aſcendere poſſit; ſed tamen in fine paragraphi expreſſe monui, *ab initio motus aquam tardius deſcendere, quam ſic definitum fuit, nec regulam iſtam prius locum habere, quam ſuperficies per ſpatiolum aliquod deſcenderit*, quæ res per ſe ſatis patet, quandoquidem non poſſit in inſtanti velocitas maxima produci à ſtatu quietis in tubo, quamvis fiat in vaſe foramine ſimplici perforato.

Hæc ita perpendens animo concepi mutationes initiales explorare, eaſque ad certas menſuras reducere. Ad hoc autem minime ſufficit præmemorata regula, quá iſtarum mutationum initialium nulla ratio habetur, quamvis cæterum exacte vera in vaſe infinite amplo; omnes enim mutationes quæ ſtatum maximæ velocitatis præcedunt, fiunt dum ſuperficies per ſpatiolum infinite parvum deſcendunt; attamen deſcenſus iſte, ſi modo vas fuerit ſenſu

Geo-

Geometrico infinitum, non ſolum non fit tempore infinite parvo, prouti in caſu foraminis ſimplicis, ſed tempore infinitè magno, intereaque etiam quantitas aquæ infinita effluit, cum per foramen quantitas cæteris paribus infinite parva effluat. Hæc autem ut eruerem, opus habui aliam elicere æquationem ex æquatione generali §. 23. *ſect.* 3. quam ſimpliciſſimam hanc $s = x$, poſita s pro altitudine, quæ velocitati aquæ effluentis reſpondeat & x pro altitudine aquæ ſupra orificium effluxus; intelliget autem quisque rem pro inſtituto noſtro ita eſſe efficiendam, ut habeatur ratio incrementorum velocitatis, quod antea non requirebatur.

§. 16. Fuerit igitur ut in paragrapho 22. *ſect.* 3. cylindrus AEHB (Fig. 18.) isque cenſeatur infinite amplus & aqua plenus, habeatque tubum annexum FMNG finitæ amplitudinis formæ coni truncati, ſive creſcentis amplitudine ſive decreſcentis verſus orificium MN, per quod aquæ effluunt: ſit ut ibi altitudo initialis aquæ ſupra foramen MN, nempe $NG + HB = a$; altitudo ſuperficiei aqueæ in ſitu CD ſupra MN, id eſt, $NG + HD = x$; longitudo tubi annexi ſeu $NG = b$, amplitudo orificii $MN = n$, amplitudo orificii $FG = g$, amplitudo cylindri, quæ eſt infinita, $= m$; ſitque tandem velocitas ſuperficiei aquæ in ſitu CD talis quæ conveniat altitudini v, quæ altitudo utique infinite parva erit. His poſitis vidimus loco citato obtinere generaliter hanc æquationem:

$$m(x-b)\,dv + \frac{bmm}{\sqrt{gn}}\,dv - \frac{m^3}{nn}\,v\,dx + mv\,dx = -mx\,dx$$

in quâ patet, poſſe nunc negligi terminum primum $m(x-b)\,dv$ præ ſecundo $\frac{bmm}{\sqrt{gn}}\,dv$, ut & quartum $mv\,dx$ præ tertio $-\frac{m^3}{nn}\,v\,dx$, atque ſic aſſumi

$$\frac{bmm}{\sqrt{gn}}\,dv - \frac{m^3 v}{nn}\,dx = -mx\,dx.$$

in qua æquatione ſi rurſus negligatur primus terminus, quod fieri poteſt, niſi mutationes etiam deſiderentur, quæ durante primo deſcenſu, etſi infinite parvo fiunt, orietur regula vulgaris *aſcenſus potentialis* aquæ effluentis ad altitudinem integram aquæ: nunc vero pro noſtro negotio, quo mutationes illas primas deſideramus, terminus iſte retinendus erit, atque ſic æquatio ultima in tota ſua extenſione pertractanda.

Ponatur autem pro ſeparandis ab invicem indeterminatis $\frac{mm}{nn}v - x = s$, ſive $v = \frac{nn}{mm}(s + x)$, atque $dv = \frac{nn}{mm}(ds + dx)$ ſicque fiet

$$dx = \frac{-nnbds}{nnb - ms\sqrt{gn}},$$

quæ ita eſt integranda, ut facta $x = a$, prodeat $v = o$, hincque $s = -a$, ita vero fit

$$x - a = \frac{nnb}{m\sqrt{gn}}\log.\frac{nnb - ms\sqrt{gn}}{nnb + ma\sqrt{gn}}$$

& poſito pro s valore ejus aſſumto $\frac{mm}{nn}v - x$, prodit

$$x - a = \frac{nnb}{m\sqrt{gn}}\log.\frac{n^4b - m^3v\sqrt{gn} + mnnx\sqrt{gn}}{n^4b + mnna\sqrt{gn}}$$

Hic rurſus in quantitate ſigno logarithmicali involuta poteſt ex numeratore eliminari terminus n^4b, infinities nempe minor termino $mnnx\sqrt{gn}$ nec non ex denominatore terminus n^4b infinities pariter minor altero $mnna\sqrt{gn}$. Et ſic fit

$$x - a = \frac{nnb}{m\sqrt{gn}}\log.\frac{nnx - mma}{nna}$$

Inde habetur, poſito c pro numero cujus logarithmus eſt unitas:

$$v = \frac{nnx}{mm} - \frac{nna}{mm} \times c^{\frac{m.(x-a)\sqrt{gn}}{nnb}}$$

aut poſita $a - x = z$, ſic ut z denotet ſpatium, per quod ſuperficies aquæ jam deſcendit, poterit æquationi hæc conciliari forma:

$$v = \frac{nn.(a-z)}{mm} - \frac{nna}{mm} : c^{\frac{mz}{nb}\sqrt{\frac{g}{n}}}$$

de qua iterum liquet quod cum z vel minimam habuerit rationem ad b, fiat denominator alterius termini infinitus & $v = \frac{nn.(a-z)}{mm} = \frac{nnx}{mm}$: at vero aliter ſe res habet, quamdiu deſcenſus z infinite parvus eſt, quem caſum nunc conſideramus.

§. 17. Hiſce præmiſſis facile nunc eſt definire per quantulum ſpatium deſcendat fluidum, dum maximam velocitatem acquirit, faciendo nempe $dv = o$,

$$dv = o, \text{ ſive } -\frac{nndz}{mm} + \frac{na}{mb}\sqrt{\frac{g}{n}} : c^{\frac{mz}{nb}\sqrt{\frac{g}{n}}} = o, \text{ id eſt,}$$

$$z = \frac{nb}{m}\sqrt{\frac{n}{g}}, \times log. \left(\frac{ma}{nb}\sqrt{\frac{g}{n}}\right).$$

Hæc autem altitudo multiplicata per altitudinem cylindri m dat quantitatem aquæ interea effluentis, nempe $nb\sqrt{\frac{n}{g}} \times log. \left(\frac{ma}{nb}\sqrt{\frac{g}{n}},\right)$ quæ quantitas, ut ſupra §. 15. præmonui, eſt infinita, quamvis tantum logarithmicaliter, cujusmodi infinitum minus eſt, quam radix cujuscunque dimenſionis datæ ex eodem infinito; eſt ſcilicet $log. \infty$ minor quam $\infty^{\frac{1}{n}}$, quantuscunque fuerit numerus n aſſignabilis. Atque hoc ideo moneo, ut ſic intelligatur, qui fiat, ut, ſi à vero infinito ratiocinamur ad quantitates valde magnas, quantitas iſta aquæ ſat parva evadat. Cæterum corollaria formulæ hæc ſunt.

(I) Si tubus annexus eſt cylindricus, fit $z = \frac{nb}{m} log. \frac{ma}{nb}$:
Igitur cæteris paribus hæc quantitas ſe habet, ut longitudo tubi annexi, quod generaliter etiam verum eſt: nam à mutato valore ipſius b cenſenda eſt non mutari quantitas $log. \frac{ma}{nb}\sqrt{\frac{g}{n}}$ ob valorem infinitum numeri $\frac{m}{n}$.

(II) Pro eodem orificio g cæterisque etiam paribus, ſequitur quantitas z ſesquiplicatam rationem orificii extremi: atque ſi idem tubus modo orificio ſtrictiori modo ampliori vaſi applicetur, erit quantitas aquæ in caſu priori ad ſimilem quantitatem in poſteriori, ut quadratum orificii amplioris, ad quadratum orificii minoris.

(III) Denique obſervandum eſt valere totum ratiocinium pro omnibus directionibus tubi, quod quivis perſpiciet qui §. 22. *ſect.* 3. recte examinabit. Poterit igitur tubus adhiberi etiam horizontalis aut ſub quâcunque alia directione & utcunque incurvus, ad quod præſertim in inſtituendis experimentis animus erit advertendus. Semper autem intelligetur per b longitudo tubi, per a vero altitudo aquæ verticalis ſupra orificium extremum.

§. 18. Venio nunc ad tempus, quo iſtæ mutationes à quiete ad maximam

ximam velocitatem fiunt : Dico autem poſſe in calculo hujusmodi temporum ſimpliciter poni $v = \frac{nn}{mm}a$; Reliquæ enim quantitates in æquatione ultima §. 16. evaneſcunt, quantumlibet parva ſumatur altitudo z, modo habeat rationem vel minimam aſſignabilem ad altitudinem illam infinite parvam, quæ reſpondet maximæ velocitati, nempe ad $\frac{nb}{m}\sqrt{\frac{n}{g}} \times log. \left(\frac{ma}{nb}\sqrt{\frac{g}{n}}\right)$. Sequitur exinde eſſe prædictum tempus, quod vocabo

$$t = \frac{b\sqrt{n}}{\sqrt{ga}} \times log. \left(\frac{ma}{nb}\sqrt{\frac{g}{n}}\right)$$

& proinde infinitum, quamvis idem tempus admodum exiguum ſit, quum amplitudo vaſis non eſt infinita, ſed utcunque magna, quod rurſus ex natura infiniti logarithmicalis eſt deducendum.

§. 19. Quia altitudo velocitatis, ut vidimus in proximo paragrapho, poteſt ſtatim cenſeri $= \frac{nn}{mm}a$, id eſt, æqualis maximæ, cum ſuperficies per minimam partem aſſignabilem deſcenſus infinite parvi, poſt quem velocitas maxima plena adeſt, deſcendit, ſequitur mutationes plerasque à quiete usque ad ſtatum maximæ velocitatis eſſe inſenſibiles, id eſt, infinite parvas, imo non ſolum plerasque, ſed & omnes præter particulam infinite parvam : res ſcilicet ſic ſe habet : velocitas à primo initio plane nulla eſt, & poſtquam aqua per ſpatiolum infinite parvum deſcendit, jam eſt tantum non maxima ; dein dum per aliud ſpatiolum rurſus quidem infinitè parvum priori tamen infinite majus, deſcendit, pergit velocitate ſua moveri, incrementa ſumens infinitè parva, & tunc demum vere maximam velocitatem attingit : Cum vero poſteriores illæ mutationes ceu infinite parvæ non poſſint ſenſibus percipi, aliter pertractabimus ea quæ à §. 17. dedimus theoremata, conſiderando loco mutationum à quiete usque ad punctum maximæ velocitatis, easdem mutationes usque ad datum gradum velocitatis.

§. 20. Indagabimus itaque, per quantum ſpatiolum z ſuperficies aquæ à ſtatu quietis deſcendere, quantaque aqua effluere, ac denique quantum tempus præterire debeat, ut aqua interna velocitate moveatur, quæ generetur lapſu libero per datam altitudinem, quam vocabimus $\frac{nn}{mm}e$, ita ut ipſa e denotet ſimilem altitudinem pro velocitate aquæ effluentis. Ad hoc requi-

quiritur, ut in æquatione ultimâ paragraphi decimi ſexti ponatur $\frac{nne}{mm}$ pro v, ſic autem erit

$$\frac{nne}{mm} = \frac{nn(a-z)}{mm} - \frac{nna}{mm} : c^{\frac{mz}{nb}\sqrt{\frac{g}{n}}}$$

hincque deducitur $\frac{mz}{nb}\sqrt{\frac{g}{n}} = \log. \frac{a}{a-e-z}$; hic vero cum e ponatur deficere notabiliter ab a poteſt rejici littera z ſigno logarithmicali involuta, unde obtinetur

$$z = \frac{nb}{m}\sqrt{\frac{n}{g}} \times \log. \frac{a}{a-e}$$

Hæc vero æquatio jam indicat ſpatiolum, quod eſt infinite parvum, & per quod deſcendit ſuperficies aquæ, dum à quiete velocitas aquæ effluentis tanta ſit, quæ debeatur altitudini e; ſeque habet hoc ſpatiolum ad illud paragrapho decimo ſeptimo indicatum, quo nempe velocitas maxima oritur, ut $\log. \frac{a}{a-e}$ ad $\log. \left(\frac{ma}{nb}\sqrt{\frac{g}{n}}\right)$ ita ut primum ſit infinities minus altero, etſi pariter infinite parvo.

Si porro definita quantitas z multiplicetur per m, obtinetur quantitas aquæ effluentis dum illa velocitas altitudini e debita producitur, quæ proin quantitas eſt æqualis

$$nb\sqrt{\frac{n}{g}} \times \log. \frac{a}{a-e}$$

atque ſic finitæ magnitudinis, & quidem eo majoris, quo longior ſumitur tubus, & quo major jactus expectatur.

Denique tempus, quo idem fit, ſi recte ſeligantur termini rejiciendi, reperitur æquale

$$2\sqrt{\left(\frac{nbb}{ag}\log. \frac{a}{a-e}\right)}$$

atque ſic finitum ſed admodum parvum & in nullo exemplo ultra minutum ſecundum facile extendendum.

§. 21. Hæc omnia accurate examinare ac proſequi volui, tum quod multorum phænomenorum, quæ in effluxu aquarum obſervari ſolent, ſolutio inde pendeat, tum etiam ut illas mutationes, quæ ſenſibus plane ſunt imperceptibiles, animo recte aſſequeremur. Multi fuerunt, qui tranſitus ab infini-

to ad finitum aut viciſſim à finito ad infinitum in aquis fluentibus non recte aſſecuti à plurimis difficultatibus ſe extricare non potuerunt, quæ aliàs facilè admittunt ſolutionem, ſi autem loco vaſis fere infiniti, cujuſmodi nulla ſunt, ſumatur vas valde amplum, aut etiam quod in multis caſibus ſufficit, mediocriter amplum, erunt formulæ proxime veræ, & modo magis modo minus ad verum accedent pro indole quæſtionis: de his quædam monebo in ſequentibus experimentis. Interim ſic ſatis jam apparet ex theoria, quod potiſſimum explicare conſtitueram, cur aqua ex vaſe ampliſſimo ſimplici omni ſtatim velocitate effluat, & cur ſecus ſit de aquis ex vaſe per tubum ejectis: Menſuræ vero præciſæ de his quæſtionibus ex æquationibus ipſis erunt deducendæ.

§. 22. Tandem quod pertinet ad tempus depletionis, patet cum amplitudo vaſis vel mediocriter ſuperat amplitudinem tubi annexi, poſſe ſine ſenſibili errore cenſeri illud $= \frac{m\alpha}{n}\,\theta$ intelligendo per θ tempus, quo corpus à quiete libere cadendo abſolvit altitudinem, quam aqua ab initio fluxus habuit ſupra orificium tubi extremum, atque ſumendo pro $\frac{m\alpha}{n}$ rationem quæ eſt inter amplitudinem vaſis & *ſectionem venæ*, ſive *contractam* ſive *dilatatam*. Impedimenta vero, quæ in his caſibus fortuito ſuperveniunt, tempus iſtud admodum augent. Si vero tempus deſideretur, quo ſuperficies aquæ per datam deſcendat altitudinem erit illud ſumendum $= \frac{m\alpha}{n}(\theta - T)$ ſumto pro T tempore quod corpus inſumit libere cadendo per altitudinem, quam aqua in fine fluxus ſupra foramen habet.

Experimenta quæ ad Sect. IV. pertinent.

QUum magna pars hujus ſectionis poſita ſit in contractione venæ aqueæ per foramen in lamina tenui factum fluentis, animo concepi de iſta contractione experimenta inſtituere accurata, non quidem menſuras accipiendo diametrorum, quam methodum non ſufficienti accuratione fieri poſſe expertus ſum, ſed obſervando velocitates *actuales* ex amplitudine jactus, & quantitates datis temporibus effluentes; In experimentis automato uſus ſum, quod tempore unius minuti primi 144. vicibus pulſabat, atque ſic ſequentia ſumſi.

Ad

Ad Theoriam Contractionis Venarum aquearum

Experimentum I.

Tubum cylindricum adhibui, cujus diameter erat 4. *poll.* 3. *lin. menſ.* Angl. è lamina tenui factum quique foramen habebat in latere, id eſt, in ſuperficie cylindrica: erat diameter foraminis $= 4\frac{52}{125}$ lin. aquæ effluebant horizontaliter ex cylindro verticaliter poſito, & fuit ab initio fluxus altitudo aquæ ſupra centrum foraminis = 4. *poll.* 8. *lin.* ſimiliſque altitudo in fine fluxus = 3. *poll.* duravit autem omnis fluxus intervallo undecim automati pulſuum, quæ proxime efficiunt tempus 4. minutorum ſecundorum cum dimidio.

Porro repetito ſæpius experimento obſervatiſque tum altitudine foraminis ſupra tabulam horizontaliter poſitam, tum amplitudine jactus, hacque tam in principio quam in fine fluxus, vidi ex *Lemm. in principio Experimentorum præcedentis Sect. indicato* velocitatem aquæ effluentis in loco venæ maxime contractæ conſtanter talem fuiſſe, quantum quidem ſenſibus dijudicari potuit, quæ deberetur altitudini aquæ ſupra eundem locum, qui in eadem altitudine eſt quâ foramen.

Igitur ſi contractionem venæ aqueæ ubique eandem fuiſſe ponamus & huic caſui applicemus æquationem ultimam paragraphi decimi tertii, nempe $t = \frac{2m\alpha}{n}(\sqrt{a} - \sqrt{c})$ erit ponendum $t = 4\frac{1}{2}$ *min. ſec.* $\frac{m}{n} = 133$; $2\sqrt{a}$ (= tempori quod corpus inſumit libere cadendo per altitudinem aquæ initialem) $= 0,1483$ & $2\sqrt{c}$ (= tempori ſimili pro altitudine aquæ ultima) $= 0,1246$: fit $4\frac{1}{2} = 3,15\alpha$; unde $\alpha = 1,43$. Exinde conſequens eſt, amplitudinem foraminis fuiſſe ad ſectionem venæ contractæ ut 143. ad 100; hæc ratio tantillo major eſt quam quæ intercedit inter $\sqrt{2}$ & 1 nempe inter 141 & 100; ſed ſi accuratiſſime velocitates obſervari potuiſſent, dubium non eſt, quin illæ paullo minores futuræ fuiſſent, quam quæ toti altitudini aquæ debeantur; & cum hujus rei ratio habetur, deprehenditur valorem ipſius α ſic pauxillum diminuendum eſſe; poteſt igitur ex toto experimento colligi tutiſſime rationem præmemoratam fuiſſe ut $\sqrt{2}$ ad 1.

Expe-

Experimentum 2.

Deinde experimento explorare volui, an in omnibus jactibus ſub quacunque directione contractio eadem ſit, & hunc in finem exiſtimavi rem ſic eſſe aggrediendam, ut præter directionis iſtius mutationem circumſtantiæ cæteræ omnes eſſent prorſus ſimiles. Id vero ſic obtinui.

Eodem ſcilicet, quo antea cylindro uſus ſum, eum autem arcæ priſmaticæ verticaliter poſitæ implantavi, ita, ut axis cylindri eſſet horizontalis, ſicque implantatum circumverti, ut centrum foraminis, aquarum effluxui deſtinati, modo locum ſummum, modo medium, modo imum occuparet: in primo caſu aquæ verticaliter ſurſum effluebant, in ſecundo horizontaliter, in tertio verticaliter deorſum ejiciebantur; in ſingulis vero feci ut altitudines aquæ in arca ſupra centrum foraminis eſſent perfecte æquales: ſucceſſus hic fuit.

Obſervavi æqualibus temporibus ſuperficiem aquæ in ſingulis caſibus per ſpatia æqualia in arca deſcendere. Igitur in venis ſurſum projectis aqua ſuperior non reſiſtit ſenſibiliter aquæ inferiori ſubſequenti, quod idem alio intellexi modo, quod ſcilicet, ſi ad parvam à foramine diſtantiam veluti 3. linearum nummo aliquo venam aqueam cujuſcunque directionis excipiebam, ita ut vena in nummum perpendiculariter incideret, effluxus aquarum non fuerit retardatus. Porro nec aqua in venis verticaliter deſcendentibus anterior poſteriorem poſt ſe trahit; ipſaque venæ contractio ſimilis ubique eſt, non conſiderata retardatione accelerationeque aquarum ſurſum vel deorſum ejectarum, quæ faciunt ut vena in aliqua à foramine diſtantia vel intumeſcat, vel gracileſcat. Hic enim ſermo eſt de illa modo contractione, quæ oritur à motu particularum obliquo in regione foraminis.

Experimentum 3.

Eadem machina prædicto modo præparata uſus ſum ad explorandum, num contractio venæ cæteris paribus mutaretur ab aucta altitudine aquæ ſupra foramen. Hunc in finem duas acus infixi lateribus internis arcæ ad perpendiculum ſibi reſpondentes, prior eminebat ſupra centrum foraminis 13 *poll.* cum 10. *lineis*, altera 12. *poll.* $1\frac{3}{5}$ *lin. menſ. Angl.* amplitudo arcæ erat ad amplitudinem foraminis ut 404. ad 1, vidi autem ſuperficiem aquæ à ſuperiore acu

acu ad inferiorem deſcendiſſe poſt intervalla 24. automati pulſuum, quæ faciunt tempus 10. minutorum ſecundorum.

Quod ſi vero tempus idem quæratur ad Hypotheſin, venam ſe nihil contraxiſſe, ſimulque aquas omni velocitate, quam vi theoriæ nullo præſente impedimento alieno habere debuiſſent, effluxiſſe, reperitur illud $= 6\frac{7}{8}$ *min. ſec.*

Sic igitur concludi poteſt, fuiſſe amplitudinem foraminis ad *ſectionem venæ contractæ* ut 10. ad $6\frac{7}{8}$, id eſt, $\alpha = 1,45$, cum in primo experimento fuerit pro eodem foramine perpenſis omnibus circumſtantiis $\alpha = 1,41$.

Poſtquam hæc ita expertus fuiſſem, reſiduum erat explorare, an aquæ omni velocitate ad ſenſus effluxerint, qua de re eo magis dubitavi, quod creſcentibus velocitatibus aquæ, creſcant ſimul impedimenta, hæcque proin notabilia eſſe poſſint in majoribus aquæ altitudinibus, qualia in minoribus non ſunt.

Feci itaque omni adhibita cura (quod potiſſimum ad præciſionem experimenti requiritur) ut aquæ ſub directione perfecte horizontali effluerent, & acceptis menſuris tum amplitudinis jactus, tum altitudinis foraminis ſupra tabulam horizontalem, vidi ſubducto calculo, quod cum altitudo aquæ erat $= 13$. *poll.* cum 10. *lin.* ſeu 166. *lin.* aquæ effluxerint, ſeu potius per *ſectionem venæ contractam* transfluxerint, velocitate, quæ convenit altitudini $158\frac{1}{2}$ *lin.* igitur velocitas in calculo diminuenda eſt in ratione ſubduplicata harum altitudinum atque in eadem ratione proxime decreſcit valor inventus litteræ α, qui ita fit paullo minor quam 1,42 ſeu rurſus 1,41 & ſic colligere licet, ſolam altitudinem aquæ mutatam ad ſenſus non mutare contractionem venæ.

Experimentum 4.

Tubum habui cylindricum altitudinis 4 *poll.* cujus ſectio per axem repreſentatur per (Fig. 28. *b.*) CABD, amplitudo cylindri erat ad amplitudinem foraminis *a c* ut 110 ad 1. Cylindrus iſte aqua plenus omnis evacuatus fuit tempore 21. minutorum ſecundorum cum dimidio. Notari autem debet, non prius aquis effluxum concedendum eſſe, quam nullus in illis motus turbinatorius obſervetur; ſecus enim aqua mox in turbinem vertitur, durante effluxu Fig. 28. *b*

ſat celerem, effluxuſque valde retardatur, eoque magis, quo celerius aqua interna in Gyrum agitur: quia porro nunquam omnis aqua effluit, effluxus tempus conſideravi, uſquedum ſtillatim effluere inciperet.

Indicat hoc experimentum minorem hic aquæ fuiſſe contractionem quam pro ratione $\surd 2$ ad 1; Expectaveram tempus evacuationis fore admodum 23. *min. ſec.* ſed eventus paullo alius fuit ut dixi, cujus rei rationem eſſe poſtmodum animadverti, quod labia foraminis elongata tubulum fere quamvis breviſſimum formarent, ut Figura oſtendit, qui venæ aqueæ contractionem impediebat: interim latitudo iſtorum labiorum duas tertias lineæ non attingebat.

Experimentum 5.

Feci ut aquæ ex vaſe ampliſſimo per tubulum effluerent horizontaliter: erat autem tubus breviſſimus, longitudinem nempe 3. *lin.* non excedens, habebatque in diametro fere 5. *lin.*

Effluxit data aquæ quantitas tempore $11\frac{1}{4}$ *min. ſec.* quæ effluere debuiſſet tempore $10\frac{2}{7}$ *min. ſec.* ſi neque contractam fuiſſe venam, neque ulla adfuiſſe impedimenta ſtatuatur.

Velocitates reales aquæ non cenſui opus eſſe ut experirer, nullus dubitans tales fuiſſe, quales eſſe debeant, ut obſervato tempore per obſervatum orificium data quantitas aquæ, nulla facta ad contractionem venæ attentione, efflueret.

Alios inſuper alius diametri longitudinisque adhibui tubulos & vidi quantitates aquæ dato tempore datisque velocitatibus effluentis recte reſpondere orficiis effluxus: velocitates autem eo magis defeciſſe à velocitate integræ altitudini aquæ debita, quo ſtrictior & quo longior erat tubus, ut & quo altior erat aqua.

Ad Theoriam aquarum per tubos effluentium.

Experimentum 6.

Vaſa, quorum ſectiones per axem repreſentant Fig. 24. & 25. cylindrica, altitudinem habebant 4. *poll. Angl.* tubosque annexos longitudinis unius pedis, amplitudines cylindrorum erant ad amplitudines orificiorum A, ut 110

ad

ad 1; Orificium autem B erat ad orificium A proxime ut 25 ad 16; tempus evacuationis repletis antea cylindris fuit in Fig. 24, *ſex min. ſec.* cum dimidio, in altera præterpropter 4 hujuſmodi minutorum cum triente.

In his caſibus vaſa ſatis ampla fuere ratione tuborum annexorum, ut veluti infinita cenſeri poſſent; debuiſſetque proin per Regulas paſſim à nobis indicatas aqua effluere per orificia extrema velocitatibus reſpondentibus toti altitudini aquæ, ſi modo excipias prima fluxus momenta, quæ ipſa tam brevia hic ſunt, ut obſervari non poſſint. Et cum præterea, ut paſſim monui, quantitas aquæ dato tempore per tubos effluentis ſimpliciter æſtimanda ſit ex celeritatibus & magnitudine orificiorum inveni per regulam §. 22. exhibitam, tempus evacuationis in primo caſu $4\frac{1}{3}$ minſec. in poſteriori = fere 3. *m. ſec.*

Quod in experimento majora paullo fuerint obſervata in Fig. 24. maximam partem adhæſioni aquæ ad latera tubi, in Fig. autem 25. alii in ſuper rationi in paragrapho 34. *ſect.* 3. indicatæ eſt tribuendum.

Phænomena alia in his vaſis ſunt notanda: nempe cum vaſa ſint tantum non evacuata, percipitur ſonus quidem ab aëre, qui tunc aquæ in orificio ſuperiori ſe miſcet. hunc vero ſonum pro ultimo fluxus momento accepi: facile fit porro, ut aquæ effluxus concedatur priusquam ad perfectam quietem fuerit reducta (nam ab impletione agitantur & in turbinem moventur aquæ); tunc autem effluxus admodum retardatur & cataractæ ſpecies interne formatur, continueque aër aquæ effluenti ſe permiſcet. Ita poteſt pro lubitu retardari effluxus, ſi in vorticem aquæ agantur antequam effluant.

Experimentum 7.

Vaſe uſus ſum Prismatico, cui tubulus infixus erat horizontaliter ut in Fig. 19. Habebat orificium G F in Diametro præciſe quinque lineas; alterum N M $6\frac{1}{2}$ *lin.* Erant proin ipſæ amplitudines orificiorum GF & NM ut 100. ad 169. amplitudo vero vaſis continebat amplitudinem orificii N M ducentis & una vicibus. Longitudo tubuli GN erat 4. *poll.*

Denide vas aquâ implevi usque in C D, cujus altitudo ſupra axem tubi erat 13. *poll.* 10, *lin.* Aperto orificio NM effluxerunt aquæ deſcenditque

ſuperficies usque in E H tempore $8\frac{1}{3}$ *min. ſec.* erat vero altitudinum differentia C E vel D H duorum pollicum cum octo lineis.

Subducto calculo ad normam paragraphi 22. ubi neque ad impedimenta, neque ad mutationem venæ attenditur, videmus prædictum tempus deſcenſus eſſe debuiſſe proxime $=$ 5 *min. ſec.* cum fere dimidio. Igitur ſtatuendum eſt hoc modo, velocitatem mediam totalem ſe habuiſſe ad velocitatem integram, quam theoria indicat, ut $5\frac{1}{2}$ ad $8\frac{1}{3}$ ſeu proxime ut 2 ad 3; hincque concludi poteſt, aquam per orificium M N effluxiſſe velocitate, quæ conveniat $(\frac{2}{3})^2$, ſeu quatuor nonis partibus altitudinis aquæ ſupra foramen M N, per alterum vero orificium G F transfluxiſſe velocitate quinque præter propter quartis ejusdem altitudinis partibus debita.

Apparet itaque rurſus effluxum aquarum promoveri ab auctâ amplitudine orificii tubi verſus exteriora, quamvis nec orificium quo tubus in vas eſt implantatus, nec ſitus tubi ſit mutatus.

Porro in tabula horizontaliter poſita P Q obſervavi amplitudinem jactus P Q pro altitudine *o* P, quæ erat 4. *poll.* 8. *lin.* Inveni autem P Q $=$ 9. *poll.* 6. *lin.*

Sequitur ex iſta obſervatione, quod ſi dilatationis venæ conſideratione ſepoſita aquæ in N M velocitatem debuerint habere, qualis debetur altitudini 4. *poll.* 10. *lin.* cum tamen vi præmiſſi experimenti certe habuerit velocitatem debitam altitudini fere 6. *poll.* 2. *lin.* Confirmat hæc obſervatio id quod §. 15. dixi, nempe in tubis divergentibus venam aqueam dilatari veluti in *m*, ipſiusque motum retardari. In præſenti vero caſu, ut ambæ obſervationes concilientur, dicendum erit venam ita dilatatam fuiſſe, ut amplitudinem haberet ratione orificii N M reciproce ut prædictæ velocitates ſeu reciproce ut radices altitudinum iſtis velocitatibus debitarum, nempe ut $\sqrt{74}$. ad $\sqrt{58}$. proindeque diametros venæ dilatatæ & orificii fuiſſe ut $\sqrt[4]{74}$ ad $\sqrt[4]{58}$. ſeu ut 100 ad 941.

Experimentum 8.

Aliud feci experimentum quod, quamvis huc nondum pertineat, nihilominus recenſebo: nempe in ortu prope orificium G F tubum perforavi foramine *e* duarum fere linearum, rurſusque deſcenſum ſuperficiei ex C D in

E H

E H obſervavi effluente aqua per N M, ſimulque amplitudinem jactus examinavi.

Duo hæc vidi, quæ prima fronte ſibi contradicere fere videntur; deſcenſus ex C D in E H tardior factus eſt quam in præcedenti experimento fuerat, & nunc duravit 10. *min. ſec.* & tamen amplior fuit jactus P Q pro eadem altitudine *o* P; jam enim erat P Q = 10. *poll.* 10. *lin.*

Ambo Phænomena ita explico: ob foramen *e*, quod fuit factum prope G F quodque aëri liberum tranſitum concedit, ſolvitur nexus, quem alias inter ſe habent aquæ in tubo, nec proin aliter transfluunt aquæ ubi eſt foraminulum *e*, quam ſi eo ipſo in loco eſſet reſciſſus tubus; fluerent autem tardius, quod paſſim demonſtravi, ſi tubus G N M F ceu divergens brevior fieret. Quod porro aquæ quamvis minori quantitate, tamen majori impetu per orificium N M non mutatum fluere poſſint ſine implicita contradictione, ratio eſt permixtio aëris cum aqua; nam aër perpetuo irruit in tubum per foraminulum *e* & una cum aqua effluit per N M. Denique phænomenon illud, quod aquæ actu celerius fluant per M N aperto, quam clauſo foramine *e*, aliter explicari non poſſe mihi videtur, quam quod impedimenta extrinſeca minus agant in aquam aëre rarefactam quam naturalem.

Ad theoriam aquarum, quæ ex vaſis ampliſſimis à puncto quietis usque ad datum velocitatis gradum effluunt.

Experimentum 9.

Quum aquæ per foramen in lamina tenui factum ex vaſe ampliſſimo effluunt, prima ſtatim guttula omni velocitate, quæ altitudini aquæ ſupra foramen debetur, erumpit.

Conforme hoc eſt cum theoria §. 11. indicata, ſi vas ſit revera infinitum, & quamvis etiam non fuerit ſenſu Geometrico infinitum, dummodo ſit valde amplum, nulla pariter guttula ab initio fluxus obſervari poteſt, quæ non maxima velocitate effluxerit: Phænomenon hoc explicui §. 14. cum nempe vi theoriæ in caſu particulari aliquo ibidem recenſito vix una aut duæ guttulæ ſenſibiliter à jactu maximo deficere debuiſ-

 ſent,

ſent, dixi non poſſe tantillam aquæ quantitatem ſe ab aqua ſubſequente ſeparare ob mutuam aquearum particularum attractionem ſeu adhæſionem.

Experimentum 10.

Quum vero aquæ ex vaſe ampliſſimo per tubum vaſi horizontaliter inſertum effluebant, obſervavi priusquam vena effluens jactum formaret, maximum *o m* Q (vid. Fig. 19,) ſat notabilem aquæ quantitatem in tabulam horizontalem ſubjectam delabi mediam inter P. & Q. eo majorem eſſe hanc quantitatem quo longior eſt tubus G N & quo magis verſus N divergit, ac denique inæqualiter aquam illam diſtribui, multo copioſius ſcilicet decidere in locum, qui eſt remotior à puncto P, quam qui eidem eſt propior; Ratione autem temporis, quo omnes iſtæ mutationes fiunt, vidi illud breviſſimum eſſe, & tale ut ejus menſura percipi non poſſet.

Omnia iſta phænomena ex aſſe ſatisfaciunt propoſitionibus, quas dedimus à paragrapho undecimo usque ad finem ſectionis. Menſuræ autem ibidem exhibitæ experimentis recte confirmari non poſſunt, præſertim illæ, quæ §, §. 15. 16. & 17. indicatæ ſunt, ubi ſcilicet formulæ communicantur, quæ exprimant quantitatem aquæ effluentis, dum à quiete maximus fit jactus: ratio eſt primò, quod primæ guttulæ quæ prope punctum P in tabulam decidere deberent ab aqua ſubſequente non libere ſe ſeparent; ſecundo, quod aquæ quantitas venæ O Q proxima (quæ quidem maximam vi ipſius theoriæ partem conſtituit) intercipi non queat, & denique, quod motus aquarum per tubos admodum tetardari ſolet, ab impedimentis extrinſecis, imprimis ſi tubi divergant, atque ſic motus realis ſit admodum diverſus à motu quem aquæ habituræ eſſent, remotis omnibus impedimentis. Reliquæ menſuræ à nobis indicatæ paucioribus iisque minoris momenti difficultatibus ſunt ſubjectæ; continentur autem §. 20. & exprimunt potiſſimum aquæ quantitatem, quæ à primo motus puncto effluit, dum aqua datum velocitatis gradum attingit.

Quamvis ob rationes modo dictas, præſertim in caſu tuborum divergentium perfectus conſenſus theoriæ cum experimentis minime expectari poſſit, talem tamen expertus fui ſucceſſum, ut facile intellexerim integrum futurum fuiſſe conſenſum ſi impedimenta omnia una cum aquearum particula-

cularum mutua adhæſione præveniri potuiſſent. Experimenta autem ſumſi tum de tubo divergente, tum de cylindrico : ſingula nunc exponam :

Experimentum 11.

In Figuræ 19. tubus formâ coni truncati horizontaliter vaſi erat in ſertus, vas ipſum aqua implevi usque in C D, ita, ut altitudo ejus ſupra axem tubi eſſet æqualis 433. particulis æqualibus, quibus in toto experimento uſus ſum. Pro illa altitudine experimento inquiſivi in punctum Q maximo jactui reſpondens, & fuit P Q = 287. *part.* dum altitudo *o* P erat = 146. *part.* Sic vidi motum aquæ tum propter aquæ adhæſionem, tum propter Figuram tubi fuiſſe valde retardatum, quod in his caſibus fieri debere aliquoties monui. Debuiſſet autem, ſi nihil obſtitiſſet motui, eſſe P Q = 503. *part.*

Deinde Patinam poſui in tabulam horizontalem, cujus ora erant in S & R : Patinam autem prius madefeci, omnemque aquam ex illa depluere rurſus ſivi: ſumtaque menſura P R, illam inveni 206 *part.*

Denique diameter G F erat = 13. *part* & M N = 17 *part.* longitudo tubi autem erat = 125 *part.*

His omnibus ita præparatis, dum orificium M N dignito obturarem, remoto confeſtim digito aquæ ejiciebantur, earumque pars aliqua in patinam decidebat: hanc ſollicite in tubum vitreum collegi cylindricum, cujus diameter erat = $8\frac{1}{2}$ *part.* tubus iſte impletus fuit ad altitudinem 210 *part.* fuit igitur quantitas aquæ in patinam delapſæ = 11922 *particulis cubicis.*

Jam vero deberet iſta quantitas per §. 20. eſſe $= nb\sqrt{\frac{n}{g}} \times log. \frac{a}{a-e}$, ubi per *n* intelligitur amplitudo orificii N M ſeu 227. *part. quadratæ* per *g* amplitudo orificii G F = 133. *part. quadr.* denotat porro *b* longitudinem tubi, quæ fuit = 125 *part.* per *a* proprie intelligitur altitudo ſuperficiei C D, ſupra axem tubi, hic vero intelligenda potius eſt altitudo conveniens velocitati aquæ in punctum Q incidentis, ſeu 141. *part.* ſimiliterque pro *e* ſumenda eſt altitudo conveniens velocitati particulæ in punctum R incidentis, nempe 73 *part.* Denique vox abbreviata *log.* ſignificat logarithmum Hyperbolicum. Factis iſtis ſubſtitutionibus numericis, fit

$$nb\sqrt{\frac{n}{g}} \times log. \frac{a}{a-e} = 227 \times 125 \times \frac{17}{13} \times log. \frac{141}{68} = 26830.$$

Fuit

Fuit igitur quantitas aquæ experimento inventa ad quantitatem, quam theoria ſepoſita impedimentorum conſideratione indicat, ut 11922 ad 26830; qui numeri, quamvis non parum differant, tamen egregie theoriam confirmant, quod ipſum nunc clare ob oculos ponam.

In formula $nb\sqrt{\frac{n}{g}} \times log. \frac{a}{a-e}$, poſuimus pro a altitudinem velocitati maximæ aquæ effluentis debitam, qualis revera fuit in experimento, non qualis remotis obſtaculis futura fuiſſet; fecimus nempe $a = 141$: in theoria vero eſt $a = 433$. Quod ſi autem valor iſte poſterior aſſumatur, retinendo valorem altitudinis $e = 73$, fit $nb\sqrt{\frac{n}{g}}\ log. \frac{a}{a-e}$ proxime $= 6700$, qui numerus nunc multo minor eſt numero per experimentum eruto, cum antea fuerit admodum major. Talis autem fit cum altitudo e ſervare valorem ponitur: Verum prouti altitudo a aucta fuit ab 141 uſque ad 433, ita certe etiam altitudo e eſt augenda, foretque utraque altitudo in eadem ratione augenda, ſi impedimenta primis guttulis æqualiter reſiſterent & ſequentibus: ſed minorem reſiſtentiam offendunt cæteris paribus particulæ, quo tardius moventur, atque proin etiam guttulæ quæ cadunt cis terminum R minus retardantur, quam quæ terminum iſtum tranſgrediuntur: Facile eſt exinde colligere in minori ratione augendam eſſe altitudinem e quam alteram a, ipſam vero rationem dicere non poſſumus, niſi à poſteriori, faciendo ſcilicet, ut theoria conveniat cum experimento; ita reperitur ponendum eſſe $e = 120$, qui numerus animo ad omnes circumſtantias bene attento plane ſatisfacit.

Sic igitur manifeſtum mihi videtur, experimenti ſucceſſum talem fuiſſe, ut plane cum theoria conveniat. Hujusmodi autem exempla omnino demonſtrant, veras motuum leges in fluidis nos tradidiſſe, eaque inter infinita alia ſelegi, quod nullam habent nexum neque affinitatem cum regula communi, quæ fluida ubique velocitate effluere ſtatuit, toti altitudini aquæ ſupra foramen debita, neque poſſint principiis conſuetis ſolvi. Cæterum quoniam in hoc experimento motus aquæ retardatus fuit, aliud inſtituere volui, quo omnia impedimenta admodum diminuerentur, ut ſic appareret eo magis ad ſe invicem accedere numeros experimenti & regulæ, quo minora eſſent impedimenta.

Expe-

Experimentum 12.

Jam itaque uſus fui tubo cylindrico per quem facilior fit transfluxus eoque ob eandem rationem ampliore: erat præterea arca cui tubus inſertus fuit multo amplior, & denique altitudo aquæ in arca contentæ ſupra axem tubi multo minor fuit, ut minori velocitate aquæ transfluerent, ſicque obſtacula minoris momenti offenderent: Cætera fuerunt, ut ante.

Fuit igitur altitudo aquæ ſupra axem tubi = 130. *part.* o P = 553. *part.* P Q = 453. *part.* P R = 297. diameter G F vel M N = 19. *part.* tubique longitudo 130. *part.*

Vidi aquam in patinam delapſam cylindrum explevisſe, qui $8\frac{1}{2}$ *part.* in diametro continebat ad altitudinem 281. *part.* & cujus proinde capacitas erat 15950. *part. cub.* In hoc caſu ponendum eſt $a = \frac{453 \cdot 453}{4 \cdot 553} = 93$. *part.* $e = 40$. *part.* $n = g = 284$. *particulis quadratis* & $b = 130$. His vero factis ſubſtitutionibus fit

$$n b \sqrt{\frac{n}{g}} \times log. \frac{a}{a-e} = 284 \cdot 130. \, log. \frac{93}{53} = 20760,$$

cui numerus in experimento reſpondet, ut vidimus, 15950. Hic vero numerus fere quatuor quintas alterius explet, ſicque eidem proxime accedit, cum in præcedenti exemplo ob rationes allatas ſimilis numerus à ſimili plus quam dimidio defecerit,

Jam igitur abunde patet, ſolis obſtaculis extrinſecis attribuendum eſſe, quod experimenta non ad amuſſim reſpondeant formulis; interim tamen talia eſſe, ut non poſſint melius harum formularum robur demonſtrare.

HYDRODYNAMICÆ
SECTIO QUINTA.
De motu aquarum ex vaſis conſtanter plenis.

§. I.

VAſa plena ſervantur, cum continue totidem affunduntur aquæ, quot effluunt; affuſio autem eſſe poteſt vel in eadem cum motus ſuperficiei aqueæ directione eademque ſingulis momentis velocitate, quaſi ſcilicet nova continue crearetur ſuperficies, cui velocitas aquæ proximæ jam inſit, vel lateralis & ſine impetu, veluti ſi ſuperficies, quæ continue nova creari fingitur, nullo motu prædita ſit & demum ab aqua inferiore ad motum cienda. Reliquos affundendi novas aquas, qui infiniti ſunt, modos præteribo.

Regula interim circa hunc motum, præſertim poſteriorem, recepta eſt, aquam effluere velocitate conveniente altitudini ſuperficiei ſupra lumen: facile tamen eſt prævidere illam valere non poſſe, niſi pro vaſe ubique infinite amplo, in reliquis autem fore, ut motus à quiete incipiens ſenſim ſenſimque per aliqua temporis intervalla augeatur, & poſt infinitum demum tempus omnem velocitatem acquirat. Attamen, ſi dicendum, quod res eſt, fiunt iſtæ accelerationes plerunque tam celeriter, ut minimo tempuſculo tantum non tota velocitas adſit: Verum res ſecus ſe habet in prælongis aquæ ductibus, in quibus velocitatum augmenta oculos non effugiunt & cum diſtinctis menſuris obſervari poſſunt.

Quicquid autem ejus rei ſit, cum nullibi diſplicere poſſit accuratio mathematica, conſtitui motum aquarum à principio ad quemvis datum terminum conſiderare & proſequi.

§. 2. Omnes hujus motus proprietates ad tres præcipue æquationes ſe reduci patiuntur 1°. inter quantitatem aquæ ejectæ reſpondentisque velocitatis; 2°. inter tempus & velocitatem & 3°. inter quantitatem aquæ & tempus. Harum æquationum ſi una habeatur reliquæ inde ſua ſponte fluunt.

Primam

Primam igitur ſolam accuratius ſcrutabimur: Hic vero memores ſimus eorum, quæ in præcedente ſectione monita fuerunt circa contractionem venæ per ſimplicia orificia, aut tubos convergentes effluentis, & dilatationem ejuſdem, cum per tubos divergentes ejicitur. Indicavimus autem §. 3. *Art.* 1. *Sect.* IV. eò uſque venam conſiderandam eſſe, donec particularum velocitates (abſtrahendo animum à mutationibus quas gravitas in particulis extra vas producit) amplius non mutentur, & omnem illam venæ partem ceü intra vas motam æſtimandam eſſe, quaſi ſcilicet ſuperficies venæ eouſque indureſcat. Igitur deinceps cum de vaſe per quod aquæ effluunt ſermo erit, ſubintelligendum erit vas illud ideale, cujus orificium effluxus ſit ſectio venæ nulli deinceps mutationi ſubjectæ, niſi quæ deſcenſui vel aſcenſui venæ debetur.

Problema.

§. 3. Invenire velocitatem aquæ effluentis ex vaſe conſtanter pleno, poſtquam jam data aquæ quantitas effluxit.

Solutio.

Duo ſunt modi affundendæ aquæ præcipue conſideratu digni, quorum quivis aliam poſtulat problematis ſolutionem: vel enim aqua verticaliter in vas depluere ponitur & ita quidem, ut eàdem præciſe affluat velocitate, quam habet aquæ ſuperficies, vel lateraliter affluit aqua, ſicque caret impetu, quo ſua ſponte aquæ ſuperficiem inſequi poſſit & in motum demum eſt cienda.

Caſus 1.

Ut pro primo caſu æquationem inveniamus inter quantitatem aquæ ejectæ, velocitatemque reſpondentem, iiſdem unica mutata circumſtantia veſtigiis inſiſtendum erit, quæ in primis paragraphis ſectionis tertiæ ſecuti ſumus.

Sit igitur ut in §. 6. *Sect.* 3. vas propoſitum *aimb* (Fig. 15. & 16.) quod affuſione aquarum conſtanter plenum ſervatur uſque in *cd*; effluant autem aquæ per foramen *pl*; ponaturque eam aquæ quantitatem jam effluxiſſe, quæ contineri poſſit in cylindro ſuper foramine *pl* erecto altitudinis *x*, ultimam autem guttulam effluxiſſe velocitate, qua aſcendere poſſit ad altitudinem *qs* ſeu *v*; ſic jam exhibenda erit æquatio inter *x* & *v*.

Sit curva C G I ſcala amplitudinum, talis nempe, ut, denotante H L alti-

altitudinem ſupra foramen, exprimat H G amplitudinem vaſis in illo loco: Deinde fiat tertia curva tru, cujus applicata H r ſit ubique æqualis tertiæ continue proportionali ad GH & PL ſeu cujus applicata Hr ſit $= PL^2 : GH$.

Dicatur ſpatium DCIL $= M$, ſpatium DtuL $= N$, & erit *aſcenſus potentialis* aquæ in vaſe contentæ, poſtquam prædicta quantitas jam effluxit (per §. 2. *ſect*. 3.) $= \frac{N}{M}v$. Effluere porro intelligatur particula $plon$, ſuperficiesque cd deſcendere in ef, erit jam velocitatis altitudo pro particula $plon$ $= v + dv$; atque ſi nunc conſtruatur parallelogrammum LxyO, cujus latus LO ſit $= lo$ & alterum Lx $=$ PL, erit *aſcenſus potentialis* ejusdem aquæ in ſitu $efmlonpie$ æqualis tertiæ proportionali ad ſpatium EFLONPIE, (quod rurſus eſt $= M$, quia PLON exprimit magnitudinem guttulæ $plon$, dum CDFE exprimit quantitatem minimam $cdfe$ iſti guttulæ æqualem) ſpatium $wuxy$OLF (quod eſt $=$ ſpatio N — DtwF + LxyO, unde ſi PL ſeu Lx ponatur $= n$, CD $= m$, LO $= lo = dx$, erit D$t = \frac{nn}{m}$, DF $= \frac{n}{m}dx$, hinc ſpatiolum DtwF $= \frac{n^3}{mm}dx$ & ſpatium LxyO $= ndx$ & denique ſpatium $wuxy$OLF $= N - \frac{n^3}{mm}dx + ndx$) & altitudinem $v + dv$. Eſt igitur *aſcenſus potentialis* modo dictus $= (N - \frac{n^3}{mm}dx + ndx) \times (v + dv) : M =$ rejectis differentialibus ſecundi ordinis $\frac{N}{M}v + \frac{N}{M}dv$ $- \frac{n^3}{mmM}vdx + \frac{n}{M}vdx$, ſic ut incrementum *aſcenſus potentialis*, quod aquæ acceſſit dum guttula $plon$ effluxit, ſit $= \frac{N}{M}dv - \frac{n^3}{mmM}vdx + \frac{n}{M}vdx$, ubi ſpatia N & M ſunt conſtantis magnitudinis ob aquæ continuam affuſionem. Non conſideramus in hoc caſu primo *aſcenſum potentialem* guttulæ $cdfe$, quæ affunditur dum altera æqualis $plon$ effluit, quia iſte aſcenſus non generatur vi interna, neque enim aqua inferior poſt ſe trahere ponitur particulam $cdfe$, quin potius hanc vi quadam extrinſeca continue affundi conſideramus, idque nec majori nec minore velocitate quam quæ eſt ſuperficiei ef. Ergo omne incrementum hic conſiderandum, eſt ut diximus

$$\frac{N}{M}dv - \frac{n^3}{mmM}vdx + \frac{n}{M}vdx.$$

Debet

Debet vero iſtud incrementum æquari *deſcenſui actuali* centri gravitatis; Atqui iſte deſcenſus, poſita DL $= a$, eſt per paragraphum ſeptimum *ſect.* 3. $= \frac{nadx}{M}$; habetur igitur talis æquatio

$$\frac{N}{M} dv - \frac{n^3}{mmM} v dx + \frac{n}{M} v dx = \frac{nadx}{M}, \text{ ſeu}$$

$$dx = Ndv : \left(na - nv + \frac{n^3}{mm} v \right);$$

Hæc vero ſi ita integretur, ut v & x ſimul evaneſcant, dat

$$x = \frac{mmN}{n^3 - nmm} \log. \frac{mma - mmv + nnv}{mma}$$

quæ æquatio, poſito c pro numero cujus logarithmus eſt unitas, æquivalet huic alteri

$$v = \frac{mma}{mm - nn} \times \left(1 - c^{\frac{n^3 - nmm}{mmN} x} \right)$$

Hæc vero ſolutio quadrat pro caſu primo, ubi aqua ſuperne motu affunditur communi cum deſcenſu ſuperficiei proximæ.

Caſus II.

Quod ſi jam particula $cdfe$ lateraliter continue affundi ponatur, tunc propter inertiam ſuam motui aquæ inferioris reſiſtit atque proinde *aſcenſus potentialis* ipſius aliter in computum venit. Tunc autem prius conſiderandus eſt *aſcenſus potentialis* maſſæ aqueæ $cdmlpic$ auctæ guttula mox affundenda; deinde indagandus *aſcenſus potent.* ejusdem aquæ in ſitu $cdmlonpic$, poſtquam nempe guttula jam effluxit, eorumque differentia eſt æquanda cum *deſcenſu actuali.* $\frac{nadx}{M}$. Verum *aſcenſus potentialis* omnis prædictæ aquæ ante affuſionem particulæ ejusdemque poſt affuſionem ita invenitur: nempe *aſcenſus potentialis* aquæ $cdmlpic$ eſt $= \frac{Nv}{M}$, & *aſcenſus potent.* particulæ affundi paratæ nullus eſt, quia lateraliter affuſa motum communem nondum habet cum maſſa inferiore; Igitur *aſcenſus potentialis* utriusque aquæ (qui ſcilicet habetur multiplicando maſſam reſpective per ſuum *aſcenſum potentialem*, dividendoque productorum aggregatum per aggregatum maſſarum) eſt =

$(M \times \frac{Nv}{M} + ndx \times o) : (M + ndx) = \frac{Nv}{M + ndx}$. Poſtquam vero particula ndx ſuperne jam affuſa eſt, communem acquiſivit motum cum aqua proxime inferiori, ſicque fit *aſcenſus potentialis* ejusdem aquæ in ſitu *cdmlonpic* æqualis tertiæ proportionali ad ſpatium CDLONPIC ($M + ndx$), ſpatium D*tuxy* OLD ($N + ndx$) & altitudinem $v + dv$, id eſt, $= \frac{(N + ndx) \times (v + dv)}{M + ndx}$, cujus exceſſus ſupra priorem *aſcenſum potentialem* eſt $= \frac{Ndv + nvdx + ndxdv}{M + dx} =$, rejectis differentialibus ſecundi ordinis, $\frac{Ndv + nvdx}{M}$. Habetur igitur talis æquatio $\frac{Ndv + nvdx}{M} = \frac{nadx}{M}$, quæ ut prior per tractata & ad finem deducta dat

$$x = \frac{N}{n} \log. \frac{a}{a - v}, \text{ vel}$$

$$v = a \times (1 - c^{\frac{-nx}{N}})$$

quæ ſolutio valet pro affuſione laterali.

Scholion I.

§. 4. Sunt hæ æquationes inter ſe admodum diverſæ; diverſitas autem eo major quo minoris eſt amplitudinis vas; & ſi quidem amplitudo vaſis ſuprema in cd quaſi infinita ſit præ amplitudine foraminis, evaneſcit n præ m fitque in priori caſu ſicut in poſteriori.

$$v = a \times (1 - c^{\frac{-n}{N} x})$$

Eſt igitur hâc in hypotheſi motus utrobique idem quod haud difficulter quisque prævidere potuerit. Celerior autem ſemper eſt cæteris paribus motus in priori affuſione, quam in altera.

Conveniet hic rem etiam phyſice explicare, ut eam diſtinctius in omnibus phænomenis percipere poſſimus.

Sit loco vaſis cujuſcunque & quamcunque directionem habentis brevioris delineationis gratia cylindrus verticalis cum foramine in fundo, nempe GHND (Fig. 29.) ſitque dein vas EFPQ perforatum in RS; fingantur orificia RS & GD perfecte æqualia, & ad minimam diſtantiam ſibi perfecte reſpon-

Fig. 29.

ſpondentia, ita ut aquæ ex ſuperiori vaſe effluentes omnes in cylindrum ſubjectum influant.

Incipiant aquæ ex utroque vaſe effluere, ex ſuperiori autem conſtanter ea effluere velocitate ponantur, quam habet ſuperficies aquæ in cylindro ſuppoſito.

Ita patet ſatisfieri primæ affuſionis conditioni. Jam vero hujus motus phænomena inveſtigabimus, viſuri num cum præcedentibus conveniant.

Conſideremus igitur vas ſuperius eſſe veluti infinitum, ut aquæ per R S effluentes ſingulis momentis habeant velocitatem quæ conveniat altitudini P B ſeu F A: ſic fingendum erit eſſe hanc altitudinem P B ab initio infinite parvam, quia tunc aquæ velocitate infinite parva effluere debent, deinde vero ſenſim creſcere, idque continue magis magisque, donec poſt tempus infinitum motus uniformis maneat, quæritur autem an altitudo aquæ P B tandem infinita futura ſit an vero certum terminùm non tranſgreſſura. Id ſic cognoſcetur.

Sit altitudo G H vel R H (neque enim illas inter ſe differre cenſendum eſt) $= a$, A F $= x$, amplitudo orificii L M $= n$, amplitudo orificii R S $= m$; quia vero, ut manifeſtum eſt, utrumque vas cohærere & unum efficere putari poteſt, erit poſt tempus infinitum (per §. 23. Sect. III.) velocitas aquæ in L M $= \sqrt{a+x}$, & in R S $= \sqrt{x}$, (quod poſterius patet, ſi nunc iterum ſeparata vaſa cenſentur, nam utrumque ſine errore fingi poteſt) debent autem velocitates eſſe in inverſa ratione amplitudinum orificiorum: eſt itaque $\sqrt{a+x}.\sqrt{x}::m.n$, unde $a+x.x::mm.nn$, vel $a.x::mm-nn.nn$, ergo $x = \frac{nna}{mm-nn}$ & $a+x = \frac{mma}{mm-nn}$, videmus igitur altitudinem, velocitati aquæ in L M debitam, eſſe hoc modo $= \frac{mma}{mm-nn}$, poſtquam ſcilicet infinita aquæ quantitas jam effluxit: ſuperius autem habuimus eandem altitudinem, ſeu $v = \frac{mma}{mm-nn} \times \left(1 - c^{\frac{n^3-nmm}{mmN}x}\right)$, ubi ſi ponitur $x = \infty$ (infinito enim tempore infinita quantitas transfluit) evaneſcit terminus exponentialis, ſi modo m major ſit quam n & ſic fit pariter $v = \frac{mma}{mm-nn}$. Mirabilis eſt iſte conſenſus, quia valde diverſæ ſunt viæ, quas ſecuti ſumus. Cæterum ſi m non ſit major quam n motus nunquam fit permanens nequidem poſt tempus infinitum, creſcit enim tunc velocitas in infinitum cum ſecus altitudo velocitatis nunquam trans-

tranſgrediatur altitudinem $\frac{mma}{mm-nn}$. De his igitur caſibus nihil eſt quod dicamus.

Scholion 2.

§. 5. Quæſtio hic nunc alia occurrit notatu digna; nempe quis eſſe poſſit modus affuſionis mechanicus, ut vas ſuperius ad debitam durante toto fluxu altitudinem plenum ſervetur. Difficile foret iſtud Problema ob inconſtantiam altitudinis quæſitæ, niſi peculiare hic artificium occurreret, quod nunc tradam.

Nititur autem ſuper eo, quod aqua in ſpatio minimo RSDG nullam patiatur compreſſionem neque affirmativam neque negativam, quia ex hypotheſi communi velocitate movetur cum aqua proxime ſubſtrata, atque ſic nulla particula nullam nec propellere nec retinere tentet.

Fiat igitur vas quod dixi utrumque, ſitque tubus cum vaſe ſuperiore firmatus (neque enim aliter quam demonſtrationis gratia illa poſuimus antea
Fig. 30. ſeparata) habeat autem tubus in ſummitate *a* (Fig. 30.) foraminulum, cui reſpondeat tubulus *a m*, in hunc tubulum immittatur tubus vitreus recurvus *a b c d g*, obtectis cera oris *m n*: ducatur horizontalis *a e* noteturque punctum *e*. His ſic præparatis, ſic erit faciendum, ut durante toto experimento ſummitas aquæ conſtanter permaneat in puncto *e*; & ad hoc requiri videbis, ut ab initio ſuperficies aquæ ſit fundo F P proxima, deinde, ut continue elevetur, & denique ut poſt tempus etſi infinitum nunquam tamen tranſcendat altitudinem $\frac{nna}{mm-nn}$, facile autem erit aquarum affuſionem ita moderari, ut ſuperficies à puncto *e* non admodum divagetur, ſi modo circumſtantiæ non ſint ita comparatæ, ut aquæ ab initio nimis celeriter ſint affundendæ.

Quod ſi autem ſuperficiem in tubulo ſupra *e* elevatam animadvertis, inhibe paullo affuſionem, quod faciendum eſſe alibi demonſtrabo, ſi ſecus fuerit, largius aquas affunde.

Nihil habet difficultatis iſtud experimenti genus cujuſmodi ſæpe feci, ſed ne error in experimentum irrepat, examinandus eſt tubi vitrei effectus capillaris; hunc effectum invenies, ſi obturato orificio L M, priuſque madefacto tubo, cylindrus aqua impleatur uſque ad ſummitatem, atque ſic invenies ſuperficiem aquæ in tubo pertingere uſque in *f*, locum nempe altiorem quam *e*, hoc

hoc autem punctum *f* illi, de quo modo diximus, abſtrahendo animum à natura tubulorum capillarium, ſubſtitues.

Hoc igitur modo recte efficietur affuſio ad normam hypotheſeos noſtræ & ſic deinceps de hoc motu experimenta ſumi poterunt. Poſt quam vero ſic prolixe ſatis rem explicuimus, non opus puto monere vas ſuperius non aliter pertinere ad vas cylindricum inferius, quod ſolum conſideramus, quam ut cylindrus eo, quo fieri debet, modo plenus ſervetur atque ſic per *m* non intelligendam eſſe amplitudinem vaſis ſuperioris ſed amplitudinem orificii R S, quæ proprie nobis eſt ſuperficies aquæ, cum aquæ ſupra R S tantum debitæ affuſioni in cylindrum inferiorem inſerviant.

Scholion 3.

§. 6. Non debeo hic præterire, quod ſic caſus habeatur qui pertinet ad *hydraulico-ſtaticam*, de qua ſcientia quædam monui in Sect. I. §. 8. cognoſcimus nempe nunc quanta velocitate aqua in *a* præterfluere debeat ut preſſio ejus in latera tubi præciſe nulla ſit. Hæc vero dum ſcriberem, jam detexeram leges *hydraulico-ſtaticæ* generales, & non ſine voluptate vidi, quod iſte caſus ceu corollarium ex theoria plane alia deductus ſimilem acquirat ſolutionem ex theoria generali. Sic omnia ubique mutuo cohærent nexu, legitimamque principiorum applicationem demonſtrant.

Scholion 4.

§. 7. Sequuntur nunc quædam de alio aquæ affundendo modo. Ponatur cylindrus R H N G pro vaſe quocunque, ſitque is conſtanter plenus conſervandus affuſione laterali: poterit id fieri injiciendo ſufficientem aquæ quantitatem per tubulum *m a*; quamvis autem id non fiat ſine motu, attamen, quia hic horizontalis eſt, mox omnis tollitur, & per ſe neque promovet fluxum per cylindrum neque eundem retardat; ſed eſt alius inſuper modus, quem ſubducto recte calculo eodem recidere intelligimus: nempe ſi vas E F P Q infinite amplum cenſemus, & ejus fundum aqua continue obtectum intelligimus, ſed ita, ut aquæ altitudo in vaſe ſuperiori ſit pro infinite parva habenda; ſubminiſtrabit vas ſuperius aquam tubo ſibi annexo, neque alius inde motus orietur, quam ab affuſione laterali, ſi modo orificium R S ſemper obtectum maneat; facile autem fit ut ibi cataracta quædam formetur, ſi orificium L M amplum, tubusque R S N H longus ſit. Quod hic alter modus eundem cum priori effe-

ctum in motum aquarum exerere debeat, quiſque videt ex eo, quod in utroque modo omnis aquæ tubum ingredientis inertia ſit ab aqua inferiore ſuperanda. Sed idem etiam *à priori* demonſtrari poterit inquirendo in motum, qui inde oriri debeat, ſecundum æquationem paragraphi octavi Sect. III. quæ hæc eſt:

$$N dv - \frac{mmvydx}{nn} + \frac{mmvdx}{y} = -yxdx;$$

accommodabitur autem ad præſentem caſum, ſi pro m, x & $-dx$ ſubſtituas reſpective n, a, & $\frac{ndx}{y}$, (cujus rei ratio patebit, ſi hæc cum illis contuleris) ſimulque y infinitum ponas; tunc enim evaneſcit tertius æquationis terminus, fitque omnino, ut pro præſenti negotio ſupra invenimus,

$$N dv + nv dx = nadx.$$

Poſtquam in his ſcholiis motus utriuſque indolem, quantum ſimplex rei conſideratio phyſica permittit, eorumque differentiam oſtendimus, ſimulque modum illos producendi ad legem hypotheſeos mechanicum tradidimus, ſupereſt, ut reliqua phænomena notabiliora etiam indicentur, quod nunc faciam.

Corollarium I.

§. 8. Si in vaſe R S N H omnè fundum abſit, erit orificium L M = orificio R S; poteſt etiam hoc ab illo ſuperari, ſi nempe vaſis divergant latera. In his autem caſibus nullum habet terminum altitudo v in æquatione

$$v = \frac{mma}{mm - nn} \times \left(1 - c^{\frac{n^3 - nmm}{mmN} x}\right)$$

& fit infinita, ſi quantitas aquæ ejectæ indicata per nx eſt infinita.

Id quidem per ſe patet ex æquatione, cum n eſt major quam m; at cum amplitudines orificiorum ſunt æquales, recurrendum eſt ad æquationem differentialem paragraphi tertii, ex qua iſta æquatio proxima deducta fuit, nempe

$$\frac{N}{M} dv - \frac{n^3}{mmM} vdx + \frac{n}{M} vdx = \frac{n}{M} adx,$$

quæ poſito $n = m$ dat $Ndv = nadx$, id eſt, $v = \frac{nax}{N}$, ubi v fit manifeſte infinita ſi x eſt infinita.

§. 9. Sin autem vaſi propoſito fundum ſit, atque in eo foramen, cujus ampli-

amplitudo indicata per n minor ſit amplitudine orificii RS expreſſa per m, habet v valorem quem nunquam attingit quidem, ſed tamen proxime aſſequitur, & ad quem tam cito convergit, niſi data opera vaſa huic rei contraria excogitata adhibeantur, ut poſt minimum fluxus tempuſculum, quod ſenſibus percipi poſſit, notabiliter ab eo non deficiat. Eſt autem terminus ille talis, $v = \frac{mma}{mm - nn}$: igitur in caſu Scholii ſecundi §. 5. ultimus terminus PB eſt $= v - a = \frac{nna}{mm - nn}$. Exemplo citiſſimam velocitatis ad ultimum ſuum terminum acceſſionem illuſtrabo, poſtquam æquationem inter v & tempus altitudini v reſpondens appoſuero.

Corollarium 3.

§. 10. In caſu affuſionis, quam vocamus, lateralis, fit ultima altitudo $v = a$, quæcunque inter utrumque vaſis orificium ratio intercefferit.

Corollarium 4.

§. 11. Si vas eſt cylindricum ejusque longitudo ponatur $= b$, fit (*vid.* §. 3.) $N = \frac{nnb}{m}$: notetur autem non confundendos eſſe valores litterarum a & b, primus enim exprimit altitudinem ſupremi orificii ſupra inferius, alter longitudinem canalis; Sic itaque conveniunt inter ſe valores in hoc ſaltem caſu, cum axis vaſis linea eſt recta & verticalis; at ſi axis tortuoſus eſt, vel ſaltem non verticalis, differunt à ſe invicem: Hæc ideo expreſſe monere volui, ne quis ſibi a figuris vaſorum, quorum axes ubique rectos & verticales feci, imponi patiatur.

Quod ſi igitur pro vaſis cylindricis ponatur $N = \frac{nn}{m} b$ fit pro affuſione verticali

$$v = \frac{mma}{mm - nn} \times \left(1 - c^{\frac{nn - mm}{mnb} x}\right)$$

& pro altera laterali fit $v = a\left(1 - c^{\frac{-mx}{nb}}\right)$.

Problema.

§. 12. Invenire velocitatem aquæ, ex vaſe conſtanter pleno effluentis, poſtquam fluxus per datum tempus duravit.

Solutio.

Retentis hypotheſibus & denominationibus omnibus, quas in §. 3. adhibuimus, poſitoque inſuper tempore à fluxus initio præterito $= t$, mutandas habebimus æquationes in dicto paragrapho datas in alias, quæ relationem exprimant inter t & v, eliminatis quantitatibus x & dx. Eſt vero elementum tempuſculi dt proportionale minimo ſpatiolo dx, quod percurritur, diviſo per velocitatem $\sqrt{v}$: ponemus igitur $dt = \frac{\gamma dx}{\sqrt{v}}$, & ſic mutabitur æquatio

$$dx = N dv : \left(na - nv + \frac{n^3}{mm} v\right)$$

quæ data fuit pro affuſione verticali debita velocitate inſtituenda in hanc

$$\text{(I)}\quad dt = N\gamma dv : \left(na\sqrt{v} - nv\sqrt{v} + \frac{n^3}{mm} v\sqrt{v}\right)$$

altera vero affuſioni inſerviens laterali, nempe $dx = N dv : (na - nv)$ abit in hanc poſt eandem ſubſtitutionem

$$\text{(II)}\quad dt = N\gamma dv : (na\sqrt{v} - nv\sqrt{v})$$

Hæ vero æquationes debito modo integratæ dant pro prima

$$(\alpha)\quad t = \frac{mN\gamma}{n\sqrt{(mma - nna)}} \times \log. \frac{m\sqrt{a} + \sqrt{(mmv - nnv)}}{m\sqrt{a} - \sqrt{(mmv - nnv)}}$$

& pro altera, quæ ex priori deducitur, poſito $m = \infty$

$$(\beta)\quad t = \frac{N\gamma}{n\sqrt{a}} \times \log. \frac{\sqrt{a} + \sqrt{v}}{\sqrt{a} - \sqrt{v}}.\quad \text{Q. E. I.}$$

Scholium.

§. 13. Si vas de quo ſermo eſt ſit cylindricum utcunque intortum & inclinatum, cujus longitudo ponatur $= b$, manente altitudine ſuperficiei aqueæ ſupra foramen $= a$, erit rurſus, ut §. 11. $N = \frac{nn}{m} b$.

Quoniam autem, ut conſtat, $2\gamma\sqrt{A}$ exprimit tempus, quod corpus inſumit cadendo libere & à quiete per altitudinem A, patet quantitatem $\frac{2mN\gamma}{nn\sqrt{a}}\left(= 2\gamma\sqrt{\frac{bb}{a}}\right)$ exprimere tempus quo corpus moveri incipiens à quiete liberè deſcendit per altitudinem $\frac{bb}{a}$: accipiemus iſtud tempus pro

com-

communi menſura idemque ponemus $= \theta$, & mutabitur pro vaſis ſeu canalibus cylindricis æquatio (α) in hanc

$$t = \frac{n\theta}{2\sqrt{(mm - nn)}} \times log. \frac{m\sqrt{a} + \sqrt{(mmv - nnv)}}{m\sqrt{a} - \sqrt{(mmv - nnv)}}$$

altera vera ſignata (β) talis fit

$$t = \frac{n\theta}{2m} \times log. \frac{\sqrt{a} + \sqrt{v}}{\sqrt{a} - \sqrt{v}},$$

ex quarum utraque apparet, non poſſe non breviſſimo tempore aquas omnem fere velocitatem acquirere, idque eo citius quo amplior eſt tubus, quo brevior, & quo magis verticalis: Neque accelerationes ullo modo eſſe perceptibiles, niſi prælongi ſtatuantur aquæ ductus & tunc quoque brevi tempore omnes fere accelerationum gradus percurri, quod utrumque nunc exemplo illuſtrabo.

(I) Quæritur tempus quo fluidum ex cylindro conſtanter pleno verticali, ſedecim pedes anglicos longo & cujus diameter quintupla ſit diametri foraminis, velocitatem acquirit quæ debeatur altitudini $\frac{99}{100}a$, idque in hypotheſi, ad quam æquatio ſecunda pertinet; ſic eſt $\frac{n}{m} = \frac{1}{25}$, $v = \frac{99}{100}a$, $b = a$, unde tempus quod corpus inſumit cadendo libere per ſpatium $\frac{bb}{a}$, ſeu $\theta =$ uni minuto ſecundo; hinc fit $t = \frac{1}{50} log. 399$. id eſt, proxime nonæ parti unius minuti ſecundi, quod tempuſculum utique imperceptibile eſt; Cum vero tempus notabile aſſumitur, fiunt mutationes altitudinum v, inſenſibiles. Si tempus ſimile (quo nempe velocitas pariter nonaginta novem centeſimis partibus altitudinis, quanta poſt tempus infinitum fit, debita generetur) in prima hypotheſi quæratur, nempe tempus quo obtinetur $v = \frac{99}{100} \times \left(\frac{mma}{mm - nn}\right)$ reperitur illud præcedente paullulum majus, ſed exceſſu inſenſibili: unde patet in hujusmodi vaſis non poſſe fere aquas ſat celeriter affundi in vas ſuperius, ut hypotheſi ſatisfiat, nec adeoque ratione ejusdem hypotheſeos experimenta alia ſumi poſſe, quam ut exploretur, num revera tanta ſit altitudo BP in figura trigeſima, quanta vi paragraphi quinti eſſe debet, ut punctum e aut f, durante fluxu ſitum ſervet, quem ante fluxum obturato orificio LM, nullaque exiſtente aqua in vaſe ſuperiore habuit.

 (II) Quæ-

(II) Quæritur nunc idem tempus pro ſecunda rurſus hypotheſi, ſi tubus ejusdem fuerit amplitudinis eodemque foramine inſtructus, ſed oblique ſitus longitudinemque b habuerit 184 *perticarum* ſeu 1104 *pedum Pariſ.* dum altitudo ſuperficiei aqueæ ſupra orificium effluxus ſit 16. *ped. Pariſ.* Ita fiet $b = 1104$, & $\frac{bb}{a} = 76176$. atque præterpropter $\theta = 72$ *ſec. min.* unde tempus quæſitum medium eſt inter octo novemque minuta ſecunda, quod certe ſatis notabile eſt. Si vero tempus deſideretur, quo altitudo v exæquet tantum quartam partem altitudinis a, reperietur illud æquale $\frac{72}{50}$ *log.* $3 =$ proxime uni minuto ſecundo cum dimidio.

Neſcio an hæc conveniant cum iis, quæ Mariottus à ſe obſervata refert in *tract. de mot. aquar. part.* 5. *diſc.* 1. ubi mentionem facit alicujus fontis ſalientis, qui eſt à *Chantilly*, ad quem aquæ devehuntur per canalem 184. *perticas* longum, ſi modo recte ex antecedentibus conjeci, eratque ſumma ſuperficiei aqueæ altitudo ſupra orificium effluxus indicata per a ſedecim *pedum*: diameter aquæductus erat 5. *poll.* orificium autem habebat diametrum unius pollicis. Videtur mihi Mariottus ita loqui ac ſi accelerationes multo fuiſſent tardiores, quam ab formula noſtra indicantur, quod neſcio an tribuendum ſit huic quod fortaſſe alium, præter orificium de quo hic ſermo eſt, exitum habuerint aquæ, an, quod aquæ ductus dum fluxus inciperet non fuerit aqua plenus, quod poſterius multa faciunt, ut credam; ſi neutrum fuerit, confido phænomena qualia à Mariotto obſervata fuerunt & quotidie de novo obſervari poterunt plane conveniſſe cum calculo noſtro. Cæterum verba Mariotti hæc ſunt: *Illud inſuper*, ait, *ſingulari eidem jactui accidit, quod obturato manu orificio per decem aut duodecim ſcrupulorum ſecundorum temporis ſpatium eodemq́ poſtea reſerato, aqua non protinus erumpat, ſed paullatim aſſurgens jactus aſcendat ad 3. poll. poſtea ad pedis altitudinem & deniq́ ad duos pedes ſucceſſive notabilibus intervallis...... Sed tandem tamen toto impetu ſuo aquæ exiliebant.*

Problema.

§. 14. Invenire quantitatem aquæ per datum vas, conſtanter plenum conſervandum, dato tempore transfluentem.

Solutio.

Solutio.

Adhibitis rurſus poſitionibus & denominationibus paragraphi tertii & duodecimi, invenienda nunc erit æquatio inter x & t: quia vero, ut vidimus §. 12. eſt $dt = \frac{\gamma dx}{\sqrt{v}}$, erit $\sqrt{v} = \frac{\gamma dx}{dt}$, hicque valor ſubſtituendus erit in æquationibus, quas dedimus §. 3. integratis; prior harum æquationum hæc fuit: $v = \frac{mma}{mm-nn} \times \left(1 - c^{\frac{n^3-nmm}{mmN}x}\right)$

quæ pro præſecuti inſtituto mutatur in hanc

$$\text{(I)} \quad \frac{\gamma\gamma dx^2}{dt^2} = \frac{mma}{mm-nn} \times \left(1 - c^{\frac{n^3-nmm}{mmN}x}\right)$$

altera ex §. 3. allegatarum æquationum talis fuit

$$v = a \times \left(1 - c^{\frac{-n}{N}x}\right)$$

quæ adeoque ſubminiſtrat in præſenti caſu ſequentem

$$\text{(II)} \quad \frac{\gamma\gamma dx^2}{dt^2} = a \times \left(1 - c^{\frac{-n}{N}x}\right)$$

Erunt nunc æquationes (I) & (II) integrandæ, quod quidem facile eſt & quia prior alteram continet (utraque enim eadem eſt ſi $m = \infty$) hanc ſolam pertractabimus, eamque nunc ſub hâc forma conſiderabimus.

$$dt = \frac{\gamma\sqrt{(mm-nn)}}{m\sqrt{a}} dx : \sqrt{\left(1 - c^{\frac{n^3-nmm}{mmN}x}\right)}$$

Ponatur autem ut integrationis modus eo magis pateſcat

$$c^{\frac{n^3-nmm}{mmN}x} = z, \text{ atque proin } dx = \frac{mmNdz}{(n^3-nmm)z},$$

dein brevitatis ergo indicetur quantitas conſtans

$$\frac{\gamma\sqrt{(mm-nn)}}{m\sqrt{a}} \times \frac{mmN}{n^3-nmm}, \text{ ſeu } \frac{-\gamma mN}{n\sqrt{(mm-nn)a}} \text{ per } \alpha,$$

& habebitur $dt = \frac{\alpha dz}{z\sqrt{(1-z)}}$,

in

in quâ ſi præterea fiat $1 - z = qq$, ſeu $z = 1 - qq$, $dz = -2q\,dq$, oritur

$$dt = \frac{-2\alpha\,dq}{1-qq} = \frac{-\alpha\,dq}{1+q}\ \frac{-\alpha\,dq}{1-q}$$

cujus integralis eſt

$$t = -\alpha\,log.\,(1+q) + \alpha\,log.\,(1-q) = \alpha\,log.\,\frac{1-q}{1+q}.$$

Nec opus eſt conſtante, quandoquidem ex natura rei t & x, ſimul evaneſcere debent, poſito autem $x = 0$, fit $z = 1$, & $q = 0$, igitur pariter t & q ſimul à nihilo incipere debent, cui conditioni ſatisfacit æquatio inventa $t = \alpha\,log.\,\frac{1-q}{1+q}$: Supereſt ut retrogrado ordine valores priſtinos reaſſumamus, ita vero fit

$$t = \alpha\,log.\,\frac{1-\sqrt{(1-z)}}{1+\sqrt{(1-z)}} \text{ vel}$$

$$t = \frac{\gamma m N}{n\sqrt{(mm-nn)\,a}} \times log.\,\frac{1+\sqrt{(1-z)}}{1-\sqrt{(1-z)}} \text{ vel denique}$$

$$\text{(I) } t = \frac{\gamma m N}{n\sqrt{(mm-nn)\,a}} \times \left[log.\left[1+\sqrt{\left(1-c^{\frac{n^3-nmm}{mmN}x}\right)}\right] - log.\left[1-\sqrt{\left(1-c^{\frac{n^3-nmm}{mmN}x}\right)}\right]\right]$$

Iſtaque æquatio poſito $m = \infty$ dat alteram æquationem quæſitam

$$\text{(II) } t = \frac{\gamma N}{n\sqrt{a}} \times \left[log.\left[1+\sqrt{\left(1-c^{\frac{-n}{N}x}\right)}\right] - log.\left[1-\sqrt{\left(1-c^{\frac{-n}{N}x}\right)}\right]\right] \text{ Q. E. I.}$$

Corollarium I.

§. 15. Si ponatur $x = \infty$, ut appareat natura rei, cum infinita jam transfluxit aquæ quantitas aſſumaturque m major quam n, prouti plerumque eſſe ſolet, evaneſcere cenſenda eſt, in utroque logarithmo affirmative ſumto, quantitas exponentialis & habebitur utrobique $log.\ 2$. At vero in logarithmo negative ſumto ſtatuenda eſt

$$\sqrt{\left(1-c^{\frac{n^3-nmm}{mmN}x}\right)} = 1 - \tfrac{1}{2}c^{\frac{n^3-nmm}{mmN}x} \text{ & proinde,}$$

log.

$$log.\left[1-\sqrt{\left(1-c^{\frac{n^3-nmm}{mmN}x}\right)}\right]=log.\tfrac{1}{2}c^{\frac{n^3-nmm}{mmN}x}=\frac{n^3-nmm}{mmN}x-log.2.$$

Hæ ſubſtitutiones ſi recte fiant, erit pro primo quem finximus affuſionis modo

$$(I)\ t=\frac{\gamma mN}{n\sqrt{(mm-nn)a}}\times\left(2\,log.2+\frac{mmn-n^3}{mmN}x\right)$$

quæ poſito rurſus $m=\infty$ dat pro altero caſu

$$(II)\ t=\frac{\gamma N}{n\sqrt{a}}\times\left(2.\,log.2+\frac{n}{N}x\right).$$

Sequitur ex iſtis formulis, minori quidem quantitate transfluere aquas, ac ſi ſtatim ab initio omni velocitate, quam in utroque caſu poſt tempus infinitum acquirunt, effluerent: differentiam tamen nunquam certum transgredi terminum & poſt tempus infinitum finitis comprehendi terminis.

Corollarium 2.

§. 16. Quum convertimus æquationes inventas, obtinemus

$$(I)\ x=\frac{2mmN}{mmn-n^3}\left[log.\left(1+c^{\frac{-t}{\alpha}}\right)-log.2+\frac{t}{2\alpha}\right],\ \&$$

$$(II)\ x=\frac{2N}{n}\times\left[log.\left(1+c^{\frac{-t}{\beta}}\right)-log.2+\frac{t}{2\beta}\right]$$

ubi α, ut ſupra, $=\frac{-\gamma mN}{n\sqrt{(mm-nn)a}}$ & $\beta=\frac{-\gamma N}{n\sqrt{a}}$.

Si præterea, ut in proximo Corollario, ponatur $t=\infty$, évaneſcit unitas præ quantitatibus, exponentialibus, quæ ſupra omnem ordinem infinitæ ſunt, & fit $log.\left(1+c^{\frac{-t}{\alpha}}\right)=-\frac{t}{\alpha}$ atque $log.\left(1+c^{\frac{-t}{\beta}}\right)=-\frac{t}{\beta}$: unde tunc erit reſumtis valoribus litterarum α & β.

$$(I)\ x=\frac{mt\sqrt{a}}{\gamma\sqrt{(mm-nn)}}-\frac{2mmN}{mmn-n^3}\,log.2.\ \&$$

$$(II)\ x=\frac{t\sqrt{a}}{\gamma}-\frac{2N}{n}\,log.2.$$

Igitur ſi ſtatim à fluxus initio utrobique aquæ omni, quam acquirere

poſſunt, velocitate conſtanter effluerent, non excederet earum quantitas poſt tempus infinitum quantitatem pro eodem tempore theoriæ reſpondentem, niſi parvula quantitate, quæ in primo caſu exprimitur per $\frac{2mmN}{mm-nn}$ *log.* 2. & in ſecundo per $\frac{aN}{n}$ *log.* 2. Atque ſi loco temporis infiniti ſumas tempus tantum aliquot ſcrupulorum ſecundorum, idem *theorema* proxime locum habebit; ita ut ſi v. gr. poſt decem prima minuta ſecunda effluxerit quantitas Q, effluxura fere ſit totidem minutis ſecundis proxime ſequentibus $Q + \frac{2mmN}{mmn-n^3}$ *log.* 2. vel in altero caſu $Q + \frac{2N}{n}$ *log.* 2.

Scholium.

§. 17. Ad theoriam hactenus expoſitam pertinet etiam motus aquarum per ſiphones. Indicat autem theoria, poſſe ſiphonis axem utcunque inflecti, neque inde motum aquarum deturbatum iri, modo altitudo ſuperficiei aqueæ ſupra orificium effluxus eadem maneat; cum præterea aquæductus, ſiphones aut diabetæ hujuſcemodique vaſa alia ſoleant eſſe cylindrica erit ut monui §. 13. quoties id contingit, ponendum $N = \frac{nn}{m} b$, intelligendo per b longitudinem canalis aut ſiphonis: in formulis quoque paragraphorum 14, 15, & 16, erunt quantitates ſic interpretandæ, ubi de temporibus quæſtio eſt, ut $2\gamma\sqrt{A}$ repræſentet tempus quod corpus impendit in deſcenſum per altitudinem verticalem A à quiete cœptum.

Cæterum, ut dixi paſſim, nihil indicat ſingulare theoria hujus ſectionis, quod ſub ſenſus cadat, niſi in aquæ ductibus admodum longis, ad horizontalem valde obliquis & orificium non admodum ſtrictum habentibus; hæc tria enim concurrunt ad retardandas ſicque notabiles efficiendas accelerationes, quarum menſuræ potiſſimum theoriam commendant.

Eſt tamen & in his circumſtantiis medium aliquod obſervandum, ne impedimenta ab adhæſione aquæ oriunda nimia ſint

Quod attinet ad affuſionem aquarum, mihi viſus ſum animadvertere, ſi ver-

verticaliter fiat & cum impetu, tantum abeſſe, ut inde motus acceleretur, quin potius retardetur, niſi aquarum affuſio fiat in totam ſuperficiem æquabiliter eo, quem ſ. 4. expoſui, modo, ſi enim aliter affundantur, motus aquarum in vaſe perturbatur, iſque motus confuſus effluxum retardat.

ſ. 18. Denique huc quodammodo pertinent experimenta ab Clar. Joanne Poleno inſtituta, ut refert in libro primo de *motu aquæ mixto*, p. 21. & ſeqq. quæ ideo hic alleganda eſſe cenſui, quod egregie demonſtrant, ubique celeritatem ultimam in vaſis conſtanter plenis eam eſſe, quæ integræ aquæ altitudini conveniat, ſi vaſa non ſint ſubmerſa, aut differentiæ altitudinum aquæ internæ & externæ in vaſis ſubmerſis, quamvis de cætero nihil in illis ſit, quod nunc novum adhuc ſit, quia nullæ illic conſiderantur accelerationes.

Finge cylindrum, cujus axis habeat ſitum verticalem, amplitudinis veluti infinitæ; fundum integrum ſit: in pariete autem fiſſura ſit axi parallela, foramen habens parallelogrammi rectanguli, quæ à fundo ad cylindri uſque ſummitatem extendatur. Puta porro aquam in cylindrum affundi æquabiliter, ita, ut æqualibus temporibus quantitates injiciantur æquales, effluent aquæ ex cylindro per fiſſuram: nec tamen ab initio eadem effluent quantitate, qua ſuperne affunduntur, ſed minori: igitur aſſurget ſuperficies aquæ in cylindro ad certam uſque altitudinem aſſymptoton; ſi vero is jam intelligatur adeſſe terminus, immutata manebit altitudo aquæ & eadem quantitate effluent conſtanter aquæ, qua affunduntur: Apparet quoque, altitudinem aquæ in cylindro eo majorem fore, quo largius affundantur: Quæritur itaque auctis quantitatibus aquarum dato tempore affundendis, in quanam ratione creſcere debeant altitudines, ad quas aquæ in cylindro aſſurgent.

Solutio hæc eſt. Sit altitudo aquæ, cum eſt in ſtatu permanente $= \alpha$: & abſcindatur à ſuperficie pars quæ ſit $= x$, una cum differentiali dx: ſit latitudo rimæ $= n$, habebimus veluti foramen amplitudinis $= n\,dx$, per quod aquæ effluunt velocitate $\sqrt{x}$: igitur quantitas aquæ dato tempore ibi effluentis eſt ut $n\,dx\sqrt{x}$, cujus integralis eſt $\frac{2}{3}nx\sqrt{x}$; quæ exprimit quantitatem aquæ dato tempore per rimæ longitudinem abſciſſam x effluentem: & ſic quantitas aquæ eodem tempore per rimam integram effluens exprimetur per $\frac{2}{3}n\alpha\sqrt{\alpha}$: tantum autem effluit, quantum affunditur; hinc ſi quantitas aquæ dato illo tempore affuſæ dicatur q, erit $\frac{2}{3}n\alpha\sqrt{\alpha} = q$. Id indicat quantitates aquarum

rum dato tempore affundendarum ſequi rationem ſeſquiplicatam altitudinum, ad quas aquæ à fundo cylindri aſcendunt: aut viciſſim altitudines ſequi rationem ſubtriplicatam quadratorum quantitatum, quibus aquæ dato tempore affunduntur.

§. 19. Soluto hoc problemate venio ad alterum Cl. Poleno conſideratum.

Sit idem cylindrus, ſed aquis in foſſa veluti vaſe infinito ſtagnantibus, ſubmerſus; dicaturque altitudo ſubmerſionis $= a$, quæritur nunc iiſdem poſitis, ut antea, rurſus æquatio inter altitudinem α ſuperficiei aqueæ internæ ſupra externam, & quantitatem q dato tempore affundendam.

Quod ad illam rimæ partem α, quæ aquas ejicit & ſupra aquam externam eminet, illam jam vidimus dato tempore erogare quantitatem $\frac{2}{3} n\alpha\sqrt{\alpha}$: reſidua autem rimæ pars ſubmerſa aquas ubique communi velocitate tranſmittit, ut ex infra dicendis patebit, & quidem velocitate $\sqrt{\alpha}$, ita, ut multiplicata hâc velocitate per magnitudinem rimæ ſubmerſæ na, habeatur quantitas, quam dato tempore ejicit $= na\sqrt{\alpha}$. Si utraque quantitas in ſummam conjiciatur, habebitur $(\frac{2}{3}\alpha + a)n\sqrt{\alpha} = q$.

Ope hujus æquationis cognoſcitur q ex datis altitudinibus a & α: aut viciſſim altitudo α ex cognitis quantitatibus a & q.

Convenire autem hanc æquationem admodum accurate cum experimentis, ipſe oſtendit celeberrimus eorum auctor, cujus ſolutio ab hâc noſtra non differt. Sequitur ex iſta æquatione, elevationes α eo majores eſſe pro iiſdem aquarum affuſionibus, quo minor eſt altitudo ſubmerſionis a.

Experimenta quæ ad Sectionem V. pertinent.

Ad §. 5.

VAſe uſus ſum §. 5. deſcripto cum tubulo vitreo (Fig. 30.) Primo autem obturavi orificium L M, tubumque R N aqua implevi, donec ſuperficies ejus raderet foraminulum in a: aquam tunc tubo ingreſſam obſervavi extremitate attigiſſe punctum f: poſtea reſerato orificio L M, & aquis effluentibus novas affundebam in vas ſuperius E F P Q adhibita diligentia, ut extremitas aquæ in f interea nec aſcenderet nec deſcenderet. Hæc dum fierent

rent elevabatur ſuperficies A B, nunquam autem certum terminum tranſgrediebatur; fuit nempe quantum videre potui, maxima altitudo P B ſeu F A $= \frac{nn}{mm-nn}a$, denotante $\frac{n}{m}$ rationem inter orificium inferius L M & ſuperius R S, & a altitudinem verticalem orificii poſterioris ſupra alterum.

Id vero ſolum eſt, quod ipſemet inſtitui experimentum, quamvis multæ ſint propoſitiones in hâc ſectione contentæ, quæ mereantur attentionem eæque ſatis inexpectatæ, non potui tamen de illis experimenta ſumere; ſunt enim ita comparatæ in vaſis brevioribus, ut quod ſingulare habent, id ſenſus effugiat, rem autem experiri in longis aquæductibus commode non potui: cum aliis hæc dabitur occaſio, theoriam hanc examinaturis, animum advertent ad ſequentia:

I°. In fontibus ſalientibus obſervetur altitudo jactus integra; poſtmodum obturato prius orificio eodemque mox reſerato videatur aquæ quantitas, quæ effluat, dum aqua ad dimidiam altitudinem jactus integri, aut aliam partem quamcunque perveniat, quod quidem breviſſimo eveniet tempore, illius quantitatis menſura ſit longitudo cylindri ſuper foramine, per quod aquæ exiliunt, exſtructi, quam longitudinem vocavimus x, altitudinem vero jactus integram nominavimus a, altitudinemque jactus qui nondum totam attigerit altitudinem, obſervatam deſignavimus per v. Tum denique inſtituto calculo exploreter, num hæ quantitates recte reſpondeant æquationibus pro utroque affundendi modo exhibitis in paragrapho tertio.

II°. Fiant omnia, ut ante, hoc ſaltem diſcrimine, quod loco quantitatis effluentis tempus effluxus notetur, ut ſic examinari poſſint formulæ paragraphi decimi tertii, & denique comparetur quantitas cum tempore fluxus, ut appareat num recte reſpondeat formulæ §. 14.

III°. Tum præcipue fiat id experimenti genus, quod indicavi paragrapho decimo ſexto, obſervando ſcilicet, quantitates aquarum dimidiis temporibus reſpondentes; dixi autem, quantumvis magnum ſumatur tempus, differentiam harum quantitatum nunquam exæquare $\frac{2mmN}{mmn-n^3}\,log.\,2$, in priori, quem finximus, affundendi modo; aut $\frac{2N}{n}\,log.\,2$, in poſteriori.

 Iſtas

Iſtas autem differentias, utut nunquam perfecte orituras, minimo tamen tempore proxime adfuturas eſſe.

Quæ reliqua ſunt in hâc ſectione Corollaria & Scholia quisque facile videbit, quo modo ad experimenta vocari poſſint: Velim autem, priusquam judicium ferat, attentus ſit ad omnes circumſtantias ratione impedimentorum, contractionis venæ, aliorumque, quas nolo ubique repetere. Ad §. §. 17. & 18. Experimenta pro confirmatione problematis §. 17. ad vaſa non ſubmerſa pertinentis, vide p. 26. *lib. cit.* Jll. Poleni.

Cum vero in vaſe ſubmerſo eſſet altitudo $a = 55$. *lin. Paris.* (quæ altitudo ei dicitur mortua) quinque inſtituit experimenta, in quibus altitudo, quam dicit, viva ſeu α erat ſucceſſive linearum $8\frac{3}{4}$; 25; 42; 58 & $73\frac{1}{2}$: his ſubſtitutis valoribus in æquatione §. 18. exhibita ſequitur, quantitates aquarum dato tempore affuſarum fuiſſe ut 100; 199; 299; 396 & 495: actu affuſæ fuerunt in ratione ut 100, 200, 300, 400, & 500: differentia tantilla eſt, ut dubitari poſſit, an non perfectus conſenſus futurus fuiſſet, ſi omnes menſuræ rectiſſime haberi potuiſſent.

Reliqua etiam experimenta à viro Cl. inſtituta cum theoria perfecte conſentiunt: calculum eorum videre eſt apud ipſum Auctorem. E re autem duxi eadem hic apponere, quia ad argumentum hujusce ſectionis pertinent, quamvis cæterum libenter fatear, me magis deſiderare illa experimenta, quæ à calculo mutationem *momentanearum*, nemini quod ſciam adhuc conſideratarum, pendent, quam quæ ſtatum *permanentem* ſupponunt.

HYDRO-

HYDRODYNAMICÆ
SECTIO SEXTA.
De fluidis non effluentibus ſeu intra latera vaſorum motis.

§. I.

HActenus conſideravimus aquas effluentes ; nunc vero contemplabimur motus aquarum, quæ vaſorum limites non præterfluunt. Omnes hos motus ad duo reducam genera, ambo ſeorſim pertractanda :

1°. Cum fluidum in tubo infinite longo continue movetur verſus eandem plagam.

2°. Cum motibus reciprocis ſeu oſcillatoriis agitatur.

De motu aquarum per canales indefinite longos.

Caſus I.

§. 2. Sit primo canalis horizontaliter poſitus, ſed amplitudinibus data quacunque varians lege : ponatur fluidum in illo ita poſitum, quod fieri ſolet in tubis ſtrictioribus, ut ambæ ſuperficies extremæ ſitum obtineant ad axem canalis perpendicularem & ſic datâ quadam velocitate moveri incipere. Hæc ſi ita ſint, nullaque plane motus impedimenta adeſſe fingantur, perſpicuum eſt, motui aquarum nullum finem fore, quemadmodum globus ſuper tabula horizontali liberrime progrediens motum ſine fine concontinuat. Attamen inſignis inter utrumque motum intercedit differentia : globi nempe partes omnes uniformi continue progrediuntur velocitate, in aqua perpetuo motum mutant : Neque difficile erit motum iſtum definire, cum conſiderabimus, motum talem eſſe debere, ut *aſcenſus potentialis* totius aquæ idem conſervetur, qui ab initio motus fuit : Determinavimus autem *aſcenſum potent.* aquæ certâ velocitate in canali quocunque motæ in ſectionis tertiæ

tiæ paragrapho ſecundo: Igitur nihil ad ſolutionem quæſtionis amplius reſiduum eſt: Neque tamen abs re erit unum alterumve ejus rei exemplum attuliſſe.

Exemplum 1.

Si v. gr. canalis $B g f C$ (Fig. 31.) qui figuram habeat coni-truncati; intelligatur pars ejus $B G F C$ fluido plena moto verſus $g f$; habeantque particulæ fluidi in $G F$ velocitatem debitam altitudini v; ac denique pervenerit fluidum in ſitum $b g f c$: His poſitis quæritur velocitas fluidi in $g f$. Vocabo autem altitudinem velocitati aquæ in $g f$ debitam $= V$; Sit vertex coni in H; diameter in $BC = n$; diameter in $GF = m$: longitudo $BG = a$; $Gg = b$, erit diameter $gf = \frac{ma - mb + nb}{a}$. Deinde quia ſolidum $BGFC$ eſt æquale ſolido $bgfc$ erit $BC^2 \times BH - GF^2 \times GH = bc^2 \times bH - gf^2 \times gH$: unde $bc^2 \times bH = BC^2 \times BH - GF^2 \times GH + gf^2 \times gH$: eſt vero $bH = \frac{BH}{BC} \times bc$: igitur $bc^3 = BC^3 - \frac{GF^2 \times GH \times BC}{BH} + \frac{gf^2 \times gH \times BC}{BH} = BC^3 - GF^3 + gf^3$, ſeu

$$bc = \sqrt{\text{Cub.}\ n^3 - m^3 + \left(\frac{ma - mb + nb}{a}\right)^3},$$

Eſt vero per §. 3. *ſect.* 3. *aſcenſus potent.* aquæ in ſitu $BGFC$ $= \frac{3m^3 v}{n(mm + mn + nn)}$; pariterque *aſcenſus potent.* ejusdem aquæ in ſitu $bgfc$ reperitur $= \frac{3\alpha^3 v}{\beta(\alpha\alpha + \alpha\beta + \beta\beta)}$, poſito brevitatis ergo α & β pro inventis valoribus diametrorum gf & bc. Erit igitur

$$V = \frac{m^3 \times (\alpha\alpha + \alpha\beta + \beta\beta) \times \beta \times v}{\alpha^3 \times (mm + mn + nn) n}.$$

Ex hâc formula facile colligitur, majori continue velocitate moveri particulas anteriores, minori poſteriores, & ſic, ut ſi foraminulum gf cenſeatur infinite parvum, fiat velocitas aquæ in gf infinita & in bc infinite parva.

Exemplum 2.

Fuerit canalis compoſitus ex duobus tubis cylindricis BN & OP (Fig. 32.)

(Fig. 32.) inæqualis amplitudinis; in ramo ampliore moveri ponatur fluidum B G F C verſus P velocitate quæ reſpondeat altitudini v. Ita perſpicuum eſt nullam motus mutationem adfore, priusquam ſuperficies G F pervenerit in M N; ab hoc autem temporis puncto motum continue variari donec fluidum omne ſubingreſſum fuerit tubum ſtrictiorem. Quæritur itaque cum fluidum ſitum tenet $bgfc$, quænam futura ſit velocitas ſuperficiei fg; altitudinem autem hujus velocitatis deſignabimus per V. Fig. 32.

Sint diametri G F & gf ut n & m: longitudo B G vocetur $= a$; $bM = b$, erit $Og = \frac{nn}{mm} \times (a-b)$; *aſcenſus potent.* aquæ B G F C $= v$; *aſcenſus potent.* aquæ $bgfc = \frac{n^4 a - n^4 b + m^4 b}{n^4 a} \times V$; ergo

$$V = \frac{n^4 a}{n^4 a - n^4 b + m^4 b} v.$$

Ex his intelligitur velocitatem primæ guttulæ in tubum ſtrictiorem irrumpentis reſpondere altitudini $\frac{n^4}{m^4} v$, hanc vero velocitatem citiſſime decreſcere, ita ut poſtquam parvula fluidi pars transfluxit, jam poſſit cenſeri $V = \frac{a}{a-b} v$, & cum omne fluidum transfluxerit, priſtinam aſſumat velocitatem. Fuerit v. gr. diameter tubi amplioris decupla alterius, & effluet prima guttula ex tubo ampliore in ſtrictiorem velocitate debita altitudini $10000\, v$: ſi vero decimam fluidi partem jam transfluxiſſe ponas, invenies altitudinem, quæ conveniat velocitati fluidi in tubo ſtrictiori progredientis, proxime æqualem $\frac{10}{9} v$.

Si tempus quæras, quo fiat transfluxus fluidi Of, invenies illud æquale $\frac{2(n^4 a - n^4 b + m^4 b)^{\frac{3}{2}} - 2m^6 a\sqrt{a}}{3mm(n^4 - m^4)\sqrt{av}}$. Igitur omne fluidum transfluit tempore $\frac{2n^6 a\sqrt{a} - 2m^6 a\sqrt{a}}{3mm(n^4 - m^4)\sqrt{av}} = \frac{2(n^4 + mmnn + m^4) a}{3mm(nn + mm)\sqrt{v}}$, ubi per $\frac{a}{\sqrt{v}}$ intelligitur tempus, quo fluidum in tubo ampliori libere motum abſolvit ſpatium a. Hæc vero, ut dixi, ſe ita habebunt ſi nulla ſint motus impedimenta, ſimulque in toto tractu canalis compoſiti velocitates amplitudinibus reciproce proportionales ponantur. Interim jam alibi monui non poſſe aquas lateri M N pro-

ximas hanc legem ſervare. Cum itaque talis caſus occurrit, eo magis conveniet motus realis cum theoria, quo longior fuerit pars *bm* & quo pauciora adfuerint obſtacula.

§. 3. Quod ſi nunc canalis fuerit non horizontaliter ſed oblique ad horizontem poſitus, apparet omnia ſimiliter ſe habere, niſi quod *aſcenſus potent.* aquæ in omni ſitu æquandus ſit *aſcenſui potent.* initiali aucto *deſcenſu actuali*, id eſt, deſcenſui verticali centri gravitatis. Atque ſi nullo impulſu aqua ſua ſponte ſe movere incipiat, erit ſimpliciter *deſcenſus actualis* æqualis *aſcenſui potent.*

Igitur aqua continue progredi perget, quamdiu centrum gravitatis loco humiliori poſitum eſt, ac fuit ab initio motus. At vero cum tubus ita fuerit formatus & inflexus eaque fluidi quantitate repletus, ut centrum gravitatis priſtinam altitudinem reaſſumere poſſit, tunc fluidum motum obtinebit retrogradum & ſine fine oſcillabitur. De iſto motu præcipuam hujus ſectionis partem faciente mox dicemus. Interea obſervare licet, fieri poſſe, ut aqua omnis ex loco humiliore per altiorem ſua ſponte ſine prævia ſuctione præterfluat, ſi modo omnia debito modo ſe habeant.

De oſcillationibus fluidorum in tubis recurvis.

Caſus II.

§. 4. Dedit Pater meus in *Comm. Acad. Scient. Petrop.* tom. 2. theoremata quædam, quæ inſignem manifeſtant uſum quem theoria virium vivarum habet in rebus mechanicis. Illud vero quod tertio loco poſitum eſt ita ſe habet.

Fig. 33. *Sit tubus cylindricus $ABCH$ (Fig. 33.) utrobiq; apertus atq; inflexus in duo crura BA & CH ad partem horizontalem BC; ſit ſinus anguli $ABC = p$, & ſinus anguli $HCB = q$; exiſtente nimirum ſinu toto $= 1$; ſit porro ille tubus aqua plenus uſq; ad horizontalem MN; voceturq; L longitudo partis tubi $MBCN$ aqua plenæ: Erunt agitati liquoris in hoc tubo oſcillationes tam majores, quam minores omnes tautochronæ atq; ejuſdem durationis cum oſcillationibus minimis penduli alicujus ſimplicis, cujus longitudo $= \frac{L}{p+q}$.*

Huic theoremati eodem auctore ſubnectitur tale corollarium.

Si

Si anguli ABC & HCB ſunt recti, qui unicus caſus eſt à Newtono ſolutus, erit longitudo penduli ſimplicis, quod oſcillanti aquæ iſochronum eſt, $= \frac{1}{2} L$, *ut invenit Newtonus.*

§. 5. Hæc ſunt quæ adhuc cum publico communicata fuerunt circa oſcillationes fluidorum, & quidem primo à Newtono, ut undarum naturam, à Patre meo, ut fertilitatem principii *virium vivarum* oſtenderet. Quia vero noſtrum inſtitutum eſt pleniorem dare de motibus aquarum theoriam, è re erit iſtud argumenti genus in tota ſua extenſione proſequi: Igitur diſquiram, quibus modis oſcillationes fluidi inæquales fiant iſochronæ, & quibus non item? Dein pro prioribus dabo longitudinem penduli ſimplicis tautochroni, pro alteris tempus durationis indicabo: tubos autem utcunque inflexos & inæqualiter amplos conſiderabo.

Lemma.

§. 6. Sit cAd (Fig. 34.) uter ſeu canalis aqua plenus formæ cujuſcunque datæ deſinens utrobique in duos canales cylindricos ac & fd, utcunque ad horizontem inclinatos & cujuſcunque amplitudinis, quorum alterum plenum aqua ponam uſque in a, alterum uſque in f; oporteat determinare altitudinem centri gravitatis omnis aquæ, ex data altitudine centri gravitatis aquæ in utre cAd contentæ, cæteriſque quantum ſufficit præcognitis. Fig. 34.

Solutio.

Fuerit centrum gravitatis aquæ in vaſe cAd contentæ in C, ductaque intelligatur per iſtud punctum C verticalis AB, deinde ducantur horizontales am, cg, fn, & db una cum verticalibus cb & de. Ponatur $ac = a$: $fd = \alpha$: $bc = b$; $ed = \beta$: amplitudo tubi $ac = g$; amplitudo tubi $fd = \gamma$: ſit porro maſſa aquea ſeu capacitas canalis $cAd = M$, linea $Ag = f$; $Ab = \phi$: $AC = m$: Dividantur lineæ mg & nb bifariam punctis D & E & ſic erunt centra gravitatis aquarum in tubis cylindricis contentarum in altitudinibus punctorum D & E.

His poſitis fit $AD = f + \frac{1}{2} b$; $AE = \phi + \frac{1}{2} \beta$: maſſa aquæ in $ac = ga$: in $fd = \gamma\alpha$: Igitur ſi centrum gravitatis quæſitum pro omni aqua $acAdf$ intelligatur in altitudine F poſitum, habebitur, ut conſtat in mechanicis, AF multiplicando maſſam aquæ in ac per DA, maſſam aquæ fd per EA & maſſam

 aquæ

aquæ in cAd per CA, aggregatumque horum productorum dividendo per ſummam harum maſſarum. Unde invenitur.

$$AF = \frac{ga \times (f + \frac{1}{2}b) + \gamma\alpha \times (\phi + \frac{1}{2}\zeta) + Mm}{ga + \gamma\alpha + M}$$

Problema.

§. 7. Determinare ubique velocitates aquæ oſcillantis, poſito oſcillationes ultra terminos tuborum cylindricorum non divagari.

Solutio.

Sit aqua oſcillationem inchoans in ſitu $acAdf$ perveneritque poſtmodum in ſitum $ocAdp$, retentiſque denominationibus in præcedente paragrapho factis, ponatur $ao = x$; erit $fp = \frac{gx}{\gamma}$: unde (ſi nempe centrum gravitatis omnis aquæ deſcendiſſe putetur ex F in O) erit vi præcedentis paragraphi

$$AO = \frac{g \times (a - x) \times (f + \frac{1}{2}b - \frac{bx}{2a}) + \gamma \times (\alpha + \frac{gx}{\gamma}) \times (\phi + \frac{1}{2}\zeta + \frac{\zeta gx}{2\alpha\gamma}) + Mm}{ga + \gamma\alpha + M}$$

Inde deducitur deſcenſus centri gravitatis ſeu *deſcenſus actualis*

$$FO = \frac{(b - \zeta + f - \phi)gx - (\frac{bg}{2a} + \frac{bgg}{2\alpha\gamma})xx}{ga + \gamma\alpha + M}$$

Sit nunc velocitas aquæ in tubo ac (cum nempe ſuperficies eſt in o) talis quæ reſpondeat altitudini v, & erit tunc *aſcenſus potent.* aquæ in altero tubo $= \frac{gg}{\gamma\gamma}v$: pariterque *aſcenſus potent.* aquæ cAd, erit proportionalis altitudini v, eamque proinde ponemus $= Nv$ (ubi N pendet à figura utris cAd & determinari poteſt per §. 2. Sect. 3.) Jam vero ſi multiplicatis ubique *aſcenſibus potentialibus* per ſuas maſſas producta dividantur per ſummam maſſarum, habebitur *aſcenſus potent.* omnis aquæ $ocAdp =$

$$\frac{(ga - gx + \frac{\alpha gg}{\gamma} + \frac{g^3 x}{\gamma\gamma} + MN)v}{ga + \gamma\alpha + M}$$

Et quia hic *aſcenſus potentialis* eſt æqualis *deſcenſui actuali* FO paullo ante invento, erit

$v =$

$$v = \frac{(b-\beta+f-\varphi)gx - \left(\frac{bg}{2a}+\frac{bgg}{2\alpha\gamma}\right)xx}{ga - gx + \frac{\alpha gg}{\gamma} + \frac{g^3 x}{\gamma\gamma} + MN} \quad \text{Q.E.I.}$$

Corollarium 1.

§. 8. Quia linea $mn = mg - nb + gb = b - \beta + f - m$, ponemus $mn = c$, ſimulque multiplicabimus denominatorem & numeratorem per $2\gamma\gamma a\alpha$: Ita vero habebimus

$$v = \frac{2g\gamma\gamma a\alpha cx - (g\gamma\gamma\alpha b + gg\gamma a\beta)xx}{2g\gamma\gamma a a\alpha - 2g\gamma\gamma a\alpha x + 2gg\gamma a\alpha\alpha + 2g^3 a\alpha x + 2\gamma\gamma a\alpha MN}$$

Corollarium 2.

§. 9. Si fiat $v = o$, patet tunc valorem x denotare totam fluidi ſuperficiei excurſionem in tubo ac, quæ ſic invenitur æqualis $\frac{2\gamma a\alpha c}{\gamma\alpha b + ga\beta}$, in altero vero tubo fit $= \frac{2ga\alpha c}{\gamma\alpha b + ga\beta}$.

Igitur poterit aqua in tubo ſtrictiori ad quamcunque elevari altitudinem, ſi modo ratio amplitudinum g & γ ſat magna ſumatur.

Corollarium 3.

§. 10. Pars illa vaſis cAd, quam neutra ſuperficierum unquam attingi ponimus, nihil pertinet ad iſtas fluidi excurſiones ſive augendas ſive diminuendas: facere tamen poteſt, ut inferius oſtendetur, ad accelerandas retardandaſque oſcillationes.

Corollarium 4.

§. 11. Ponatur uterque tubus communis amplitudinis, erit, poſito nempe $g = \gamma$,

$$v = \frac{2ga\alpha cx - (g\alpha b + ga\beta)xx}{2gaa\alpha + 2ga\alpha\alpha + 2a\alpha MN}.$$

In hoc caſu maxima ſuperficiei utriuſque velocitas eſt, cum in medio totius excurſionis poſitæ ſunt, ſecus ac fit, cum tubi ſunt inæqualis amplitudinis.

Notandum quoque eſt, ſimiles eſſe inter ſe retardationes & accelerationes in diſtantiis ſimilibus ſuperficierum à punctis mediarum excurſionum, id eſt, à locis maximarum velocitatum.

Theorema.

§. 12. Cum amplitudines tuborum cylindricorum prædicto modo ſunt æquales, erunt oſcillationes tam majores quam minores inter ſe Iſochronæ, modo ſuperficies nunquam deſcendant infra orificia eorundem tuborum.

Demonſtratio.

Ex mechanicis conſtat, quod ſi mobile oſcillans ſpatium perfecerit $= x$, habeatque in ſingulis locis elementum temporis $dt = \frac{m\,dx}{\sqrt{nx - xx}}$, intelligendo per m & n quantitates conſtantes, id faciat oſcillationes ſuas tam majores quam minores eodem tempore.

Quia vero in noſtro caſu eſt

$$v = \frac{2ga\alpha cx - (g\alpha b + ga\beta)xx}{2gaa\alpha + 2ga\alpha\alpha + 2a\alpha MN},$$

& quia velocitas ipſa eſt æqualis $\sqrt{v}$, erit

$$dt = dx\sqrt{\left(\frac{2gaa\alpha + 2ga\alpha\alpha + 2a\alpha MN}{g\alpha b + ga\beta}\right)} : \sqrt{\left(\frac{2a\alpha cx}{g\alpha b + ga\beta} - xx\right)},$$

ubi pariter omnes litteræ conſtantem habent valorem præter x, quæ ſpatium percurſum denotat; patet has quoque fluidi oſcillationes iſochronas fore. Q. E. D.

Problema.

§. 13. Invenire longitudinem penduli ſimplicis, quod ſit tautochronum cum oſcillationibus fluidi præfatis.

Solutio.

In mechanicis demonſtratur, quod, cum $dt = \frac{m\,dx}{\sqrt{nx - xx}}$, ſit longitudo penduli ſimplicis tautochroni $= \frac{1}{2}mm$: Erit igitur in noſtro caſu de quo ſermo eſt longitudo penduli quæſita $= \frac{gaa\alpha + ga\alpha\alpha + a\alpha MN}{g\alpha b + ga\beta}$. Q. E. I.

Corol-

Corollarium. 1.

§. 14. Si ponatur canalis cAd ejuſdem amplitudinis cum tubis conjunctis, ejuſque longitudo vocetur l, erit maſſa aquæ in eo contentæ, quam vocavimus $M = gl$; & *aſcenſus potent.* aquæ in illo contentæ, quem poſuimus $= Nv$, erit $= v$, ita ut habeatur $N = 1$. Subſtitutis autem, iſtis valoribus pro litteris M & N, prodit longitudo penduli tautochroni pro iſto caſu particulari $=$

$$\frac{aa\alpha + a\alpha\alpha + a\alpha l}{\alpha b + a\beta} = \frac{a\alpha}{\alpha b + a\beta} \times (a + \alpha + l) = \frac{a + \alpha + l}{\frac{b}{a} + \frac{\beta}{\alpha}}$$

Quia vero $a + \alpha + l$ eſt longitudo totius tractus aqua pleni & $\frac{b}{a}$ ſignificat rationem ſinus anguli bac ad ſinum totum pariter atque $\frac{\beta}{\alpha}$ denotat rationem ſinus anguli efd ad ſinum totum, videmus non differre noſtram ſolutionem ab illa, quam Pater meus pro iſto caſu dedit, quamque ſupra recenſui §. 4.

Corollarium 2.

§. 15. Si ponatur canalis cAd infinitæ ubique amplitudinis, erit $MN = o$ (per §. 2. *ſect.* 3.) & longitudo penduli tantochroni $= \frac{a + \alpha}{\frac{b}{a} + \frac{\beta}{\alpha}}$, quaſi nempe totus canalis intermedius cAd abeſſet, tubique cylindrici inter ſe immediate eſſent conjuncti.

Eſt tamen hic ſpeciale aliquid conſiderandum, quod infra monebo.

Scholion.

§. 16. Complectitur hoc theorema omnes caſus, qui oſcillationes tantochronas faciunt, ubi tubi ac & pd ſunt recti: cum vero hi tubi, in quibus fluidi ſuperficies excurrunt, incurvati ſunt, dantur alii inſuper tantochronismi caſus, quos facile foret determinare, ſi hiſce diutius immorari vellemus. Cæterum cum tubi hi inæqualis amplitudinis ſunt, fiunt quoque tempora oſcillationibus diverſarum magnitudinum reſpondentia inæqualia, & quomodo tempus tale definiri debeat unicuique apparet ex §. 8. ubi velocitatem fluidi in quolibet puncto dedimus.

Hæc

Hæc autem de oſcillationibus finitis. Si nunc oſcillationes minimas eſſe cènſeamus, videbimus illas fieri omnes inter ſe tantochronas, manente eadem fluidi quantitate, eodemque canali, quæcunque interea ſint canalis figura & amplitudines. Id exponam in ſequenti paragrapho.

Theorema.

§. 17. Oſcillationes minimæ fluidi in quocunque canali oſcillantis, quamvis inæquales inter ſe, ſunt omnes Iſochronæ.

Demonſtratio.

Cum oſcillationes ſunt minimæ, poſſunt illæ canalis particulæ, in quibus ſuperficies fluidi agitantur, pro cylindricis haberi, igitur manentibus denominationibus iisdem, manebit valor, quem aſſignavimus litteræ v in §. 8. & ex eadem ratione ſequitur, litteras a, b, α, β & x ceu infinite parvi valoris negligi poſſe præ $\frac{M}{g}$, ſic ut in præſenti caſu cenſeri debeat

$$v = \frac{2g\gamma a\alpha cx - (g\gamma\alpha b + ggab)xx}{2\gamma a\alpha MN}$$

Sunt igitur vi paragraphi duodecimi oſcillationes omnes, quoad minimæ ſunt, inter ſe Iſochronæ. Q. E. D.

Problema.

§. 18. Determinare longitudinem penduli ſimplicis tautochroni cum oſcillationibus minimis fluidi in canali quocunque agitati.

Solutio.

Quia in omni motu eſt elementum temporis $dt = \frac{dx}{\sqrt{v}}$, erit nunc

$$dt = dx\sqrt{\left(\frac{2\gamma a\alpha MN}{g\gamma\alpha b + ggab}\right)} : \sqrt{\left(\frac{2\gamma a\alpha cx}{\gamma\alpha b + ga\beta} - xx\right)}$$

Igitur vi Paragraphi decimi tertii erit longitudo quæſita penduli cum prædictis oſcillationibus tautochroni $= \frac{\gamma a\alpha MN}{g\gamma\alpha b + gga\beta}$. Q. E. I.

Scholium.

§. 19. Quamvis jam paſſim monuerim, quid intelligendum ſit per quan-

quantitates M & N, tamen hic apponam totam conſtructionem, ut natura rei eo magis unicuique pateat.

Fuerit canalis qualiscunque ABCDE, (Fig. 35. *a* & *b*) aqua plenus usque in B & D; ponatur ſinus totus $= 1$, ſinus anguli DBC $= \frac{b}{a} = m$, ſinus anguli BDC $= \frac{c}{a} = n$, erit longitudo penduli tautochroni $= \frac{\gamma MN}{mg\gamma + ngg}$, ubi g denotat amplitudinem canalis in B & γ amplitudinem ejus in D. Fig. 35. *a* & *b*.

Concipiatur nunc longitudo canalis BCD fluido plena in rectam extenſa *bcd*, ſuper qua ceu axe fiat curva FGH, quæ ſit ſcala amplitudinum in locis homologis, ita, ut poſita $bc =$ BC ſit cG ad bF, ut amplitudo in C ad amplitudinem in B. Igitur ſi bF repræſentet amplitudinem in B, tunc ſpatium bdHF repræſentabit magnitudinem M. Deinde ſuper eodem axe bd conſtruatur alia curva LMN, cujus applicata cM ſit ubique $\frac{bF^2}{cG}$ & erit (per §. 2. *ſect.* 3.) N $=$ ſpatio bdNL diviſo per ſpatium bdHF, ita ut ſit $M \times N =$ ſpatio bdNL, quod multiplicatum per $\frac{\gamma}{mg\gamma + ngg}$ dabit longitudinem penduli tautochroni.

Corollarium 1.

§. 20. Si tubus BCD ſit ubique ejusdem amplitudinis, ejusque longitudo dicatur l, erit FH linea recta ipſi bd parallela, pariter atque LN: hinc ſpatium bdNL $= gl$ & longitudo penduli tautochroni $= \frac{l}{m+n}$.

Corollarium 2.

§. 21. Sit BCD canalis conicus longitudinis l; erit cG (poſita $bc = x$) $= \left(\frac{x}{l}[\sqrt{\gamma} - \sqrt{g}] + \sqrt{g}\right)^2$; unde $cM = gg : \left(\frac{x}{l}[\sqrt{\gamma} - \sqrt{g}] + \sqrt{g}\right)^2$; ergo ſpatium bcML $= \frac{ggl}{\sqrt{g\gamma} - g} - \frac{ggl}{\sqrt{\gamma} - \sqrt{g}} : \left(\frac{x}{l}[\sqrt{\gamma} - \sqrt{g}] + \sqrt{g}\right)$ & proinde totum ſpatium bdNL $= \frac{ggl}{\sqrt{g\gamma} - g} + \frac{ggl}{\sqrt{g\gamma} - \gamma} = \frac{ggl}{\sqrt{g\gamma}}$: Eſt igitur longitudo penduli tautochroni cum oſcillante aqua $= \frac{l\sqrt{g\gamma}}{m\gamma + ng}$.

Hinc intelligitur cæteris paribus oſcillari aquam tardiſſime cum amplitudi-

tudines in B & D ſunt in ratione reciproca ſinuum angulorum reſpondentium D B C & B D C: dein quo longior ſit pars aqua plena & quo minores anguli modo dicti, eò pariter tardiores fieri oſcillationes.]

Porro comparatis inter ſe tubis cylindricis & conicis, poſitisque angulis B D C & D B C æqualibus, perſpicuum eſt, citius oſcillari aquam cæteris paribus in conicis quam cylindricis, quia nempe $\frac{l\sqrt{g\gamma}}{\gamma+g}$ ſemper minor eſt quam $\frac{1}{2}l$, quæcunque ratio inæqualis intercedat inter g & γ. Si porro prædicti anguli inæquales ponantur, fieri poteſt tam ut tardius quam ut citius oſcilletur aqua in uno tuborum genere reſpectu alterius, quod ut exemplo confirmem, ponam angulum D B C rectum, id eſt, $m = 1$, & ſinum alterius anguli B D C ſeu $n = \frac{1}{4}$, ita erit longitudo penduli pro tubis cylindricis $= \frac{4}{5}l$: Si vero ſub iisdem reliquis circumſtantiis tubo cylindrico ſubſtituas conicum, qui amplitudinem in B habeat quadruplo majorem, quam eſt amplitudo in D, habebis, poſito $\gamma = \frac{1}{4}g$, longitudinem penduli $= l$: longius eſt itaque cæteris paribus pendulum tautochronum pro tubo conico quam pro cylindrico, & tardius fiunt oſcillationes in illo, quam in hoc: ſed ſi nunc, manentibus rurſus reliquis, tubum conicum ſtrictiorem ponamus in B quam in D, contrarium erit: fuerit v. gr. $\gamma = 4g$, erit longitudo penduli $= \frac{8}{17}l$, & proinde minor, quam ſi tubus cylindricus foret; rurſusque minor erit, ſi amplitudinem in B admodum majorem ponas, quam eſt in D: ita ſi fuerit $\gamma = \frac{1}{64}g$, erit longitudo penduli $= \frac{8}{17}l$, ut ante. Notabile eſt, ut in præcedente etiam vidimus exemplo, quod, manentibus amplitudine in B, ſitu canalis B C D ejusdemque longitudine, duæ ſemper diverſæ definiri poſſint amplitudines in D pro eadem penduli tautochroni longitudine, niſi cum anguli D B C & B D C ſunt æquales. Hujus rei exemplum eſt particulare, quod, ſive amplitudo in D æqualis ſit amplitudini in B, ſive rationem ad eandem habeat quadratam ſinus ang. B D C & ſin. ang. D B C, eodem tempore oſcillationes fluidi abſolvantur in tubo utroque.

Scholion Generale.

§. 22. Experimenta de oſcillantibus fluidis ita ſumpſi, ut crebra tentatione longitudinem penduli ſimplicis Iſochroni invenirem, hancque longitudinem in diverſis caſibus talem præter propter eſſe obſervare potui, quam theo

theoria in hâc ſectione indicat ; aliquando tamen longitudinem illam debitâ paullo majorem inveni ; cujus rei rationem haud difficulter hanc eſſe vidi, quod frictiones fluidi excurſiones non ſolum diminuant, ſed & retardent, ut &, quod tubi eo in loco, quo inflectuntur, ſtrictiores eſſe ſoleant: Id poſterius, ſi omni cura evitetur, ſique ipſæ inflexiones non uno angulo ſed lente fiant, & ſi denique pro liquore oſcillante mercurius puriſſimus adhibeatur, dubium mihi nullum ſupereſt, fore ut experimenta præmiſſam theoriam ad amuſſim confirment, ita, ut operæ pretium non duxerim anxie de illis inquirere.

Id tamen ratione experimentorum à me inſtitutorum ſuperaddam, quod amplitudines tuborum ante experimentum in diverſis eorum locis accurate exploraverim ope columellæ mercurii, quæ dum gradatim totam longitudinem tubi percurreret, longitudinibus ſuis diverſis, quarum menſuras aſſiduè accipiebam, amplitudinum variationes ubique manifeſtabat: Et hæ quidem amplitudines ita in tubo erunt explorandæ, poſtquam jam fuerit incurvatus, nam ab incurvatione amplitudines admodum decreſcunt. Hæc ratio fuit, quod in primo hanc in rem à me ſumto experimento, ſucceſſus expectationem meam fefellerit: Tubum nempe vitreum, cujusmodi pro barometris conficiendis adhibere ſolent, ſatis amplum eundemque fere perfecte cylindricum, incurvare feci, ut oſtendit propemodum Figura vigeſima ſeptima, eoque deinde mercurio maximam partem repleto, oſcillationes ejus longe tardius fieri vidi, quam expectaveram, quia non attendi, tubum ab incurvatione in D inſigniter fuiſſe conſtrictum, præſertim ubi anguli formantur. Hujus igitur rei, ut rationem haberem, tubis deinceps lente incurvatis uſus fui, quales oſtendit Fig. 35. *a.* in iisque amplitudines poſt incurvationem diligenter exploravi.

 HYDRO-

HYDRODYNAMICÆ
SECTIO SEPTIMA.
De motu aquarum per vaſa ſubmerſa, ubi exemplis oſtenditur, quam inſigniter utile ſit principium conſervationis virium vivarum, vel iis in caſibus, quibus continue aliquid de illis perdi cenſendum eſt.

PARS PRIMA.
De deſcenſu aquarum.

§. 1.

Finge cylindrum aquâ plenum, cujus fundum perforatum ſit, illudque ad certam altitudinem aquæ ſtagnanti veluti infinitæ ſubmerſum, & facile intelliges ſuperficiem aquæ in cylindro contentæ deſcenſuram, & quidem infra ſuperficiem aquæ exterioris, dein rurſus aſcenſuram & ſic porro. Hæ vero oſcillationes admodum differunt ab oſcillationibus in præcedente ſectione conſideratis, in quibus nempe motus reciproci ſemper ſunt inverſo ordine iidem cum motibus, qui præceſſerunt. Quis autem hic præſumat refluxum aquarum ſeu aſcenſum eundem fore, qui fuerat deſcenſus. Talia ſi quis ſtatueret, is certe vehementer falleretur, etiamſi vel nihil motus diminuatur ab adhæſione aquarum ad latera vaſis hujuſcemodique aliis impedimentis, non ſecus atque regulæ motuum à percuſſione pro corporibus elaſticis valde diverſæ ſunt ab iis, quæ pro corporibus mollibus valent, utut in utroque caſu corpora liberrime moveri cenſeantur. Utor hoc ſimili, quod argumentum noſtrum egregie illuſtrat: Prouti enim regulæ motuum in corporibus mollibus recte determinatur, ſi poſt colliſionem ea *vis vivæ* pars deperdita cenſeatur, quæ in compreſſionem corporum impenſa fuit (neque enim hæc ut in corporibus elaſticis reſtituitur motui progreſſivo) ita aſcenſus fluidi non minus recte definietur, ſi accurate examinetur, quantum *vis vivæ* ſingulis momentis motui particularum aquearum inteſtino communicetur, nunquam rediturum ad motum progreſſivum, de quo ſermo eſt.

§. 2. Cum itaque res eo deducta ſit, ut exploretur, quantum *vis vivæ* in motibus iſtis reciprocis continue perdatur, diſquiſitionem ab hoc incipiemus.

Primò

Primò autem patet omnem *vim vivam* quæ particulis effluentibus ineſt tranſire ad aquam externam nec ullo modo promovere ſubſequentem aſcenſum ſeu influxum aquæ externæ in tubum: Nimis hæc eſt clara hypotheſis, quam ut majori explicatione opus habeat: reſpicit autem aquarum effluxum & in hoc unica eſt conſideranda. Venit jam altera, quæ pertinet ad aquarum influxum.

Secundò igitur non minus perſpicuum mihi quidem eſt, quod irruente aqua per foramen majori velocitate, quam quæ aquæ internæ aſcendenti ineſt, exceſſus ille rurſus motum quendam inteſtinum in eadem aqua interna cieat, parum aut nihil ad aſcenſum conferentem. Hoc ſi ita ſit, ponaturque amplitudo foraminis $= 1$, amplitudo cylindri $= n$, *aſcenſus potent.* guttulæ irrumpentis $= nnv$, ejusque velocitas $= n\sqrt{v}$, retinebit hæc particula motu ſuo, quem cum reliqua aqua interna communem habet, velocitatem $\sqrt{v}$, conſervabitque proinde *aſcenſum potent.* v; reliquum autem *aſcenſus potent.* nempe $nnv - v$ ad motum particularum inteſtinum transiiſſe cenſendum eſt. Hypotheſis iſta, quamvis Phyſica ſit & proxime tantum vera, tamen magnam habet utilitatem ad motus fluidorum ſine notabili errore determinandos, quoties in vaſe uniformis continuitas, quæ hactenus aſſumta fuit, prærumpitur, veluti cum aqua per plura foramina tranſire cogitur; Imo crediderim unicam eſſe, cujus ope hujusmodi motus mira phænomena recte explicari poſſint. Quapropter velim, ut recte animo perpendatur, antequam ad alia divertatur lector.

§. 3. Jam igitur quæſtionem ipſam examinabimus, incipiendo ab aquarum deſcenſu. Concipiatur cylindrus AIMB, (Fig. 36.) aqua plenus usque in XY & aquæ infinitæ RTVS ſubmerſus, ita ut longitudo ejus ſit in ſitu verticali habeat ejus fundum lumen PL, per quod aqua ex vaſe in aquam circumfluam effluere poſſit. Quæritur velocitas aquæ internæ, poſtquam ſuperficies ejus per datum ſpatium XC vel YD deſcendit, poſita MY vel IX $= a$, MV $= b$, MD $= x$, amplitudine foraminis $= 1$, & denique amplitudine cylindri $= n$. Fig. 36.

Solutio eadem erit, quam pro ſimili quæſtione, ſed ea admodum generali, dedimus in ſectione tertia: obſervetur tantum, quod ſumta particula aquæ infinitè parva CDFE æquali guttulæ PLON eo ipſo tempore ejectæ, *deſcenſus actualis* ſit nunc æſtimandus ex altitudine DV vel CT, cum in altero caſu definiendus erat ex tota altitudine DM.

Sit nempe velocitas ſuperficiei aqueæ CD ea, quæ debetur

 alti-

altitudini v, & in ſitu infinite propinquo E F reſpondebit eadem velocitas altitudini $v - dv$; Et cum *aſcenſus potentialis* aquæ C D M L P I C ſit v, obtinebitur *aſcenſus potent.* ejusdem aquæ in ſitu proximo E F M L O N P I E, ſi multiplicetur maſſa E F M L P I E $(nx - ndx)$ per ſuum *aſcenſum potent.* $(v - dv)$ ut etiam guttula L O N P (ndx) per ſuum itidem *aſcenſum potentialem* nnv, aggregatumque productorum dividatur per ſummam maſſarum (nx): habetur itaque *iſte aſcenſus potentialis* $= \frac{(nx - ndx) \times (v - dv) + ndx \times nnv}{nx}$

ſeu $\frac{xv - vdx - xdv + nnvdx}{x}$.

Eſt proinde incrementum *aſcenſus potent.* $= \frac{-vdx - xdv + nnvdx}{x}$. (*conf.* §. 6. *ſect.* 3.) Iſtud vero incrementum æquale cenſendum eſt cum *deſcenſu actuali* infinitè parvo, qui (per §. 7. *ſect.* 3. & per annotationem modo datam) eſt $= \frac{(x - b)\,dx}{x}$. Habetur itaque talis æquatio

$$-vdx - xdv + nnvdx = (x - b)\,dx,$$

quæ debito modo integrata mutatur in hanc

$$v = \frac{1}{nn-2} \times \left(x - \frac{x^{nn-1}}{a^{nn-2}}\right) - \frac{b}{nn-1} \times \left(1 - \frac{x^{nn-1}}{a^{nn-1}}\right).$$

Ex iſta vero æquatione talia ſequuntur corollaria.

§. 4. Fuerit amplitudo cylindri veluti infinita ratione foraminis, & erit cènſendum $v = \frac{x - b}{nn}$; ipſaque altitudo pro velocitate aquæ, dum effluit, eſt $= x - b$. Unde conſequens eſt, aquam effluere velocitate, quam grave acquirit cadendo ex altitudine ſuperficiei internæ ſupra externam, & eo usque effluet, donec ambæ ſuperficies ſint ad libellam poſitæ, tuncque omnis motus ceſſabit: adeoque eadem lege aquæ effluunt, quaſi fundum ſitum I M mutaret cum T V.

Cum vero foramen non poteſt ceu infinite parvum conſiderari, deſcendit ſuperficies aquæ internæ infra externam; atque ut innoteſcat ad quamnam profunditatem xy ſit deſcenſura ſuperficies C D, facienda eſt $v = 0$, ſeu

$$(nn - 1)\left(a^{nn-1}x - x^{nn-1}a\right) = (nn-2) \times \left(a^{nn-1}b - x^{nn-1}b\right),$$

nunquam autem ſuperficies interna tantum deſcendet infra ſuperficiem externam

nam, quantum ſuper eandem elevata fuerat, provenit iſte defectus *ab aſcenſu pot.* aquæ durante deſcenſu ejectæ, cui debet eſſe proportionalis.

§. 5. Notabile eſt, quod cum eo profundius deſcendat aqua in cylindro, quo magis ab initio deſcenſus fuerit elevata & quo majori lumine perforatum eſt fundum, nunquam tamen omnis aqua ex cylindro effluere poſſit quantumvis fuerit ante deſcenſum elevata & pars cylindri ſubmerſa utlibet parva, ipſumque ſimul foramen vel totum fundum exhaurire ponatur.

§. 6. Velocitas ſuperficiei aquæ internæ maxima eſt, cum ſumitur

$$x = \left(\frac{a^{nn-1}}{nna - nnb - a + 2b}\right)^{1:(nn-2)}$$

Si proinde $n = 1$, exiſtente ſcilicet orificio cylindri toto aperto, fit $x = b$, & maxima eſt velocitas, cum ambæ ſuperficies ſunt in eadem altitudine poſitæ.

Quia vero multa ſunt, quæ ex hiſce æquationibus dignoſci nequeunt in duobus caſibus, nempe $nn = 1$ & $nn = 2$, hique multa habent particularia, eoſdem ſeorſim jam attingam.

§. 7. Sit primo $nn = 1$, & erit $-x\,dv = (x-b)\,dx$ (*per §.* 3.) vel $-dv = dx - \frac{b\,dx}{x}$, quæ ſic integrata, ut ſit ſimul $v = o$ & $x = a$, dat $-v = x - a + b\,log.\,\frac{a}{x}$, ſeu $v = a - x - b\,log.\,\frac{a}{x}$: Exinde talia deduci poſſunt.

I°. Ut obtineatur maximus deſcenſus, faciendum eſt $a - x - b\,log.\,\frac{a}{x} = o$; patet autem ex iſta æquatione, nunquam negativum valorem obtinere litteram x, imo nequidem totam evaneſcere ſine contradictione, niſi ponatur $\frac{a}{b} = \infty$, quod indicat fieri non poſſe, ut omnis effluat aqua durante deſcenſu in iſto caſu & multo minus in reliquis, quod confirmat paragraphum quintum.

II°. Velocitas maxima talis eſt, quæ debetur altitudini $a - b - b\,log.\,\frac{a}{b}$, atque ſi differentia inter a & b, quam ponam $= c$, ſit valde parva, exiſtentibus nimirum excurſionibus fluidi perexiguis ratione longitudinis, ad quam cylin-

cylindrus eſt ſubmerſus, poterit $log. \frac{a}{b}$ cenſeri $= \frac{c}{b} - \frac{cc}{2bb}$ ipſaque proinde altitudo maximæ debita velocitati ſeu $a - b - b\,log. \frac{a}{b} = \frac{cc}{2b}$, quod motum admodum lentum fore arguit.

Demonſtrabo autem in ſequentibus, totum motum cæteris paribus eundem manere, cum cylindri cenſentur infinite ſubmerſi, quocunque foramine fundum fuerit perforatum, ita ut motus aquæ internæ à diminuto foramine non retardetur; quod quamvis prima fronte admodum paradoxum videatur, non poterit tamen vera ejus ratio phyſica effugere animum ad hæc attentiorem. In eo ſcilicet verſatur, quod *vis viva*, quæ in tubo generatur, veluti infinita ſit præ vi viva aquæ per foramen tranſeuntis nec adeoque hujus foraminis conſideratio computum diverſum faciat.

Demonſtrabimus etiam ſimiles eſſe motus reciprocos & oſcillationes tam majores quam minores inter ſe eſſe Iſochronas, atque pro hiſce longitudinem penduli ſimplicis tautochroni determinabimus.

§. 8. Fuerit nunc $nn = 2$; Ita vero habetur vi §. 3. $v\,dx - x\,dv = (x - b)\,dx$, vel $\frac{x\,dv - v\,dx}{xx} = \frac{-(b-x)\,dx}{xx}$, quæ recte integrata abit in hanc $v = \frac{bx}{a} - b + x\,log. \frac{a}{x}$. Si fiat $\frac{bx}{a} - b + x\,log. \frac{a}{x} = o$, dabit x locum maximi deſcenſus; locus autem maximæ velocitatis habebitur, faciendo $x = c^{\frac{b-a}{a}}\,a$, ubi per c intelligitur numerus, cujus logarithmus eſt unitas.

Poſtquam ſic varios perſtrinximus caſus pro diverſis foraminum magnitudinibus, ſupereſt ut etiam conſideremus, quid in diverſis altitudinum a & b caſibus ſuccedere poſſit.

§. 9. Et primo quidem ſi b nulla ſtatuatur præ a, quod fit cum cylindri fundum tantum radit ſuperficiem aquæ exterioris, tunc prodit

$$v = \frac{1}{nn - 2}\left(x - \frac{x^{nn-1}}{a^{nn-2}}\right)$$

quæ quidem æquatio non niſi forma differt ab illa, quæ §. 14. *Sect.* 3. data fuit pro eo caſu, quo aquæ ex cylindro in aërem ejici ponuntur. Et ſæpe etiam exper-

expertus ſum cylindrum eodem tempore evacuari, ſive aquæ in aërem ejiciantur, ſive fundum aquæ ſtagnanti tantillum ſubmergatur. Docet hæc experientia parum aut nihil obſtare aërem externum effluxui, cum reſiſtentia plus quam octingenties major notabiliorem effectum non exerat. Quia adeoque iſte caſus nihil particulare habet, quod non loco citato monitum fuerit, huic non ulterius immorabimur: Inquiremus potius, quid fieri debeat, cum elevatio aquæ internæ ſuper externam, quanta ab initio deſcenſus eſt, ſumitur valde parva & negligenda præ immerſione cylindri; cui hypotheſi ſatisfit, cum exceſſus altitudinis a ſuper altitudinem b (quem exceſſum rurſus vocabimus (ut §. 7.) c) eſt admodum parvus.

§. 10. Cum itaque ponitur $a - b = c$, ponendum etiam erit $a - x = z$, tumque utraque quantitas, nempe c & z, erunt negligendæ præ quantitatibus a & b, ſed ſi $a - x = z$, erit $x = a - z$ & $x^{nn-1} = (a-z)^{nn-1} =$

$$a^{nn-1} - (nn-1)a^{nn-2}z + \left(\frac{\overline{nn-1}.\overline{nn-2}}{2}\right)a^{nn-3}zz$$
$$- \left(\frac{\overline{nn-1}.\overline{nn-2}.\overline{nn-3}}{2.\ 3.}\right)a^{nn-4}z^3 + \&c.$$

Hæc ſeries quantum ad inſtitutum noſtrum ſufficit eſt continuanda; ſufficiet autem ad tres usque terminos. Igitur in æquatione integrata quam dedimus §. 3. ponemus, $x = a - z$ &

$$x^{nn-1} = a^{nn-1} - (nn-1)a^{nn-2}z + \left(\frac{\overline{nn-1}.\overline{nn-2}}{2}\right)a^{nn-3}zz\ \&$$

ſic erit

$$v = \frac{1!}{nn-2}\left[a - z - a + (nn-1)z - \left(\frac{\overline{nn-1}.\overline{nn-2}}{2}\right)\frac{zz}{a}\right]$$
$$- \frac{b}{nn-1}\left[1 - 1 + (nn-1)\frac{z}{a} - \left(\frac{\overline{nn-1}.\overline{nn-2}}{2}\right)\frac{zz}{aa}\right]$$

In qua æquatione ſi termini ſe deſtruentes deleantur, atque ponatur $a - c$ pro b, rejiciaturque terminus qui affectatur quantitate $\frac{czz}{aa}$, prodit ſimpliciter

$$v = \frac{2cz - zz}{2a}.$$

ex quâ formula, cum littera n evanuerit, indicium habemus, nihil magni-

tudinem orificii pertinere ad motum aquæ internæ, cujus rei originem jam ſupra (§. 7.) indicavi.

In ſequentibus autem demonſtrabimus, non differre hunc motum à ſubſequente motu refluo, hincque oſcillationes fieri tautochronas. Priusquam vero ad alia pergam monendum duxi, in iſto calculo quantitates $\frac{c}{a}$ & $\frac{z}{a}$ non ſolum præ unitate, ſed & præ $\frac{1}{nn}$ ceu infinite parvas poſitas fuiſſe, ad quod animus probe eſt advertendus in inſtituendis experimentis; licet utique theoriam infinite parvorum ad experimenta, ſine notabili errore revocare diminuendo admodum quantitates, quæ in theoria ceu infinite parvæ conſideratæ fuerunt, ſed faciendum eſt, ut in experimento omnia huic legi ſint ſubjecta. Ita v. gr. ſi in cylindro omne fundum abſit, poſito $n = 1$, idque ſubmerſum ponatur ad altitudinem triginta quinque pollicum, ſatis accurate ſumetur experimentum, cum aqua ante oſcillationes elevata tantum fuerit ad altitudinem unius pollicis ſupra ſuperficiem aquæ circumfluæ; nec dum error notabilis erit, ſi vel orificium inferius ad dimidium obſtruatur exiſtente tunc $\frac{c}{a}$ ad $\frac{1}{nn}$ ut 1. 9, quæ ratio in noſtro experimento tuto adhuc negligi poteſt: at ſi jam diametrum tubi duplam ponas diametri orificii, occluſis tribus quartis aperturæ integræ partibus, jam fiet $n = 4$ & $\frac{c}{a}$ ad $\frac{1}{nn}$ ut 4 ad 9, quæ ratio non ſatis parva amplius erit, ut experimentum conditionibus theoriæ cum ſufficienti præciſione ſatisfacere affirmari poſſit.

Hic itaque jam porro inquirere conveniet, quid de his caſibus ſtatuendum ſit, quibus $\frac{c}{a}$ & $\frac{1}{nn}$ notabilem quidem inter ſe habent rationem, utraque vero quantitas ſit admodum exigua, quod nimirum fit, cum cylindrus profundiſſime ſubmergitur, ſimul autem fundum parvulo eſt pertuſum foramine.

§. 11. Sed iſte, quem modo finximus, caſus melius ex æquatione differentiali paragraphi tertii, quam ex integrali, ut antea factum, deducitur: poteſt autem pro his circumſtantiis rejici terminus $-v\,dx$ præ $nnv\,dx$, atque ſic aſſumi $-x\,dv + nnv\,dx = (x-b)\,dx$, in quâ ſi rurſus ponitur $a-b=c$ & $a-x=z$, prodit

$$a\,dv + z\,dv + nnv\,dz = (c-z)\,dz$$

cujus

cujus ſecundus terminus $z\,dv$ rurſus præ primo negligi poteſt, ita vero habetur

$$a\,dv + nnv\,dz = (c - z)\,dz.$$

Ponatur hic (ſumto α pro numero, cujus logarithmus hyperbolicus eſt unitas) $v = \frac{1}{nn}\alpha^{\frac{-nnz}{a}}q$; hoc modo mutabitur poſtrema æquatio in hanc

$$\alpha^{\frac{-nnz}{a}}a\,dq = nn(c - z)\,dz, \text{ vel}$$

$$a\,dq = nn\,\alpha^{\frac{nnz}{a}} \times (c - z)\,dz:$$

Hæc vero ita eſt integranda, ut z & v vel etiam z & q ſimul evaneſcant; habebitur igitur

$$q = \left(c + \frac{a}{nn} - z\right)\alpha^{\frac{nnz}{a}} - c - \frac{a}{nn}, \text{ vel denique}$$

$$v = \frac{1}{nn}\left(c + \frac{a}{nn} - z\right) - \frac{1}{nn}\left(c + \frac{a}{nn}\right)\alpha^{\frac{-nnz}{a}};$$

Ex iſta vero æquatione deducitur:

I. Oriri rurſus, ut paragrapho decimo alia mathodo inventum fuit, $v = \frac{2cz - zz}{2a}$, ſi nempe rurſus ponatur $\frac{nnz}{a}$ numerus valde parvus. Id vero ut pateat, reſolvenda eſt quantitas exponentialis $\alpha^{\frac{-nnz}{a}}$ in ſeriem, quæ eſt ipſi æqualis, $1 - \frac{nnz}{a} + \frac{n^4zz}{2aa} - \frac{n^6z^3}{2.3a^3} +$ &c. ex quâ pro noſtro ſcopo tres priores termini ſufficiunt; eo autem ſubſtituto valore rejectoque termino rejiciendo, reperitur ut dixi

$$v = \frac{2cz - zz}{2a}$$

II. At ſi viciſſim $\frac{nn}{1}$ infinites major ponatur quam $\frac{a}{z}$ aut $\frac{a}{c}$, quia tunc $\alpha^{\frac{-nnz}{a}} = o$, ut & $\frac{a}{nn} = o$, fieri intelligitur $v = c - z$, ſive $v = x - b$, ut §. 4.

III. Neutram vero præmiſſarum formularum ſine notabili errore locum habere patet, cum $\frac{nnc}{a}$, numerus eſt mediocris, nempe nec infinitus, nec infinite parvus, & tamen utraque quantitas $\frac{nn}{1}$ & $\frac{a}{c}$ infinita.

Fuerit v. gr. elevatio indicata per c unius pollicis, immerſio cylindri b 80. *poll.* ipſaque a 81. *poll.* dein ponatur diameter tubi tripla diametri foraminis, id eſt, $nn = 81$, erit $v = \frac{2 - z - 2a^{-z}}{nn}$, atque ſi porro ponatur $z = c = 1$, ut habeatur altitudo velocitatis, cum utraque ſuperficies eſt ad libellam poſita, erit $v = \frac{a-2}{nna}$, id eſt, proxime $v = \frac{1}{307}$ *poll.* cum ſecundum paragraphum decimum debuiſſet oriri $v = \frac{1}{162}$ *poll.* & ſecundum paragraphum quartum $v = 0$. In eodem exemplo fit ſpatium integrum, quod ſuperficies percurrit non omnino octo quintarum partium unius pollicis, locusque maximæ velocitatis eſt præterpropter ſexaginta novem centeſimarum partium ejusdem menſuræ infra altitudinem initialem.

§. 12. Non difficilius eſſet ad omnes vaſorum figuras extendere, quæ hactenus dicta ſunt, imo etiam ad ſpatia finita, quibus aqua externa determinetur: fiunt autem formulæ plerumque adeo prolixæ, ut conſultius duxerim easdem ſilentio præterire, & ſpecimine ſaltem aliquo particularem oſtendere modum, quo theoria ad quoslibet caſus alios eruendos applicanda ſit.

Attentionem particulariorem merentur, quæ de motu aquarum in tubis inferius largiter apertis, & profundiſſime ſubmerſis indicavi, quia in his motus oſcillatorius, ut in pendulis, conſtantis durationis eſt, & undarum in mari fluxus illuſtratur ab illis. Exiſtimavi autem prius de refluxu aquarum in cylindris ſubmerſis generaliter tractandum eſſe, atque oſtendendum in iſta hypotheſi refluxum non differre à præcedente fluxu, quam motus totus oſcillatorius examinetur. Jam igitur de iſto refluxu commentabimur, deinceps utrumque motum in diverſis caſibus combinaturi, ne aliquid in argumento deſiderari poſſit.

PARS SECUNDA.

De aſcenſu aquarum.

§. 13. Poſtquam aquæ deſcenderunt in vaſe ſubmerſo, quantum id ipſis natura rei permittit, duo potiſſimum conſideranda ſe offerunt; primo exceſſus altitudinis ſuperficiei externæ ſupra internam & ſecundo *vis viva* ſeu productum ex *aſcenſu potentiali* in maſſam illius aquæ, quæ ex cylindro in aquam cir-

circumſtagnantem durante deſcenſu ejecta fuit: hæc enim *vis viva*, quæ redire non poteſt ad aquam in cylindro, facit potiſſimum ut aquæ multum abſint, quo minus priſtinam, ex quâ ceciderant, in refluxu attingant altitudinem: nec tamen unica eſt hæc ratio, etiamſi vel nihil obſtent impedimenta tenacitatis, adhæſionis, hujuſmodique alia: Altera ratio indicata fuit §. 2. Iſtius vero rationis menſura ex ipſo aſcenſu eſt deducenda, cum prior ad deſcenſum pertineat & ſola, abſtrahendo animum ab impedimentis extrinſecis, in cauſa eſt, cur non aqua in aſcenſu tantum ſupra ſuperficiem externam elevetur, quantum infra eandem depreſſa fuerat. Notandum enim eſt, futurum fuiſſe, aquis vel per minimum foramen influentibus, ut eadem velocitate aſcenderent, tanquam ſi omne fundum deeſſet, plenoque orificio irrumperent, ſi modo poſt influxum impetum, quem in aquas internas faciunt, totum exererent ad earum aſcenſum promovendum: Verum quicunque hanc rem recte perpendit facile videt, plerumque impetum iſtum totum fere impendi in motum aliquem inteſtinum, qui nihil aſcenſum promoveat; dico autem notanter plerumque (quod bene notetur velim) quia cum foramen magnum admodum eſt, non difficulter prævidetur, impetum aquarum influentium ita apte fieri, ut motus internus haud parum inde promoveatur; at cum foramen minus eſt, liquet, rem ſecus ſe habere. Recte igitur adhibetur hypotheſis noſtra, cum vel fundum omne abeſt, aut fere totum eſt perforatum (ſic enim exceſſus velocitatis aquæ influentis ſupra velocitatem aquæ internæ nullus, aut valde exiguus eſt, & nullum illa in hanc impetum facit) vel etiam cum foramen minimum eſt, quia ſic omnis impetus infringitur. Sed ſi foramen rationem habuerit ad amplitudinem tubi, veluti ut $\sqrt{2}$. ad 1, vel ut 2. ad 1, aut circiter, major paululum erit motus quam qui ex iſta hypotheſi ſequitur, quia tunc notabilem impetum faciunt aquæ irruentes, nec is omnis per rei naturam perditur.

Facile igitur eſt ſine inſtituto calculo prævidere ſequentes in aquarum, poſtquam ex certa altitudine delapſæ fuerunt, refluxu affectiones.

I. Nullum nempe fore refluxum ſenſibilem, ſi foramen ſit valde parvum.

II. Cum pars cylindri ſubmerſa non mutata maneat, nunquam aquas in refluxu certum terminum prætergreſſuras, ſi vel in infinitum elevatæ fuerint aquæ in prævio deſcenſu: nunquam enim, ex quâcunque altitudine incipiat deſcenſus, omnes aquæ ex cylindro effluunt, ut vidimus, §. §. 5, & 7.

 III.

III. Cum deſcenſus incipere intelligatur ab altitudine XY, ſubſequenſque aſcenſus fieri uſque in CD, fore productum *deſcenſus actualis* maſſæ aquæ XYDC uſque ad TV in maſſam, menſuram rationis utriuſque combinatæ, quæ, ut §. 2. dictum, aſcenſum à præcedente deſcenſu differre faciunt, & cum ratio ſecundo loco recenſita evaneſcat, ſi omne auferatur fundum IM, fore tunc iſtud productum æquale *vi vivæ* omnis aquæ, durante deſcenſu ejectæ, ita ut ſine alio calculo, præter hactenus jam poſitos, aſcenſus aquarum in cylindro toto aperto definiri poſſit.

IV. Aſcenſum fore æqualem deſcenſui, cum cylindrus infinite ſubmerſus intelligitur evaneſcentibus tunc præfatis diminutionis cauſis.

V. Hinc igitur oſcillationes ſine fine fore, quia poſtremæ oſcillationes ſemper ſint veluti infinite parvæ ratione ſubmerſionis altitudinum: faciunt autem impedimenta aliena, quorum nullam hucuſque rationem habuimus, ut omnis motus cito admodum ceſſet.

§. 14. His generatim præmonitis, problema accuratiori calculo ſubjiciemus: duplicem autem dabo ſolutionem, alteram ad principia modo expoſita accommodatam, alteram ſpecie quodammodo diverſam.

Igitur retentis tum figura, tum denominationibus §. 3. conſiderabimus aquam ex altitudine XY deſcendiſſe uſque in xy, & ab hoc termino aſcenſum ſuum inchoare; dicatur My vel I$x = \alpha$ & poſtquam jam aſcendit uſque ad cd vel ef, ponatur M$d = \xi$, $df = d\xi$: His ita ad calculum præparatis, deſignataque rurſus per v altitudine debita velocitati aquæ in cd & per $v + dv$ ſimili altitudine in ſitu proximo ef, inquiremus in *incrementum aſcenſus potentialis* aquæ accedens, dum cylindrum ſubit guttula LONP, ſuperficieſque ex cd aſcendit in ef; Perſpicuum autem eſt, cum ubique *aſcenſus potent.* aquæ internæ multiplicatus per ſuam maſſam exprimatur per $n\xi v$ (nec enim ulla attentio adhibenda eſt ad motum inteſtinum) fore ejusdem producti incrementum $n\xi dv + nvd\xi$: Si vero præterea conſideretur *aſcenſus potent.* $nnv - v$, (vid. §. 2.) quem guttula influens $nd\xi$ perdit, quique pariter debetur *deſcenſui actuali* particulæ aqueæ $nd\xi$ per altitudinem $b - x$, patet eſſe ponendum

$$n\xi dv + nvd\xi + (nnv - v)nd\xi = (b - \xi)nd\xi, \text{ vel}$$
$$\xi dv + nnvd\xi = (b - \xi)d\xi.$$

Idem

Idem vero aliter ſic invenitur.

Conſideretur ſcilicet guttulæ L O N P quaſi nullam velocitatem fuiſſe, priuſquam influere inciperet, eandem vero ſtatim atque influere incipiat, acquirere *aſcenſum potentialem*, qui ſit $= nnv$, quamvis mox poſt ſui influxum (per annot. ſec. §. 2.) cenſenda ſit motum continuare velocitate communi $\sqrt{v}$. Quo facto ſic erit ratiocinandum. Ante influxum guttulæ, eſt *aſcenſus potent.* aquæ cdMLPIc (cujus maſſa $= n\xi$) $= v$. & *aſcenſ. potent.* guttulæ L O N P (cujus maſſa $= nd\xi$) $= o$; ergo *aſcenſus potentialis* omnis aquæ cdMLONPI$c = \frac{n\xi v}{n\xi + nd\xi} = \frac{\xi v}{\xi + d\xi}$.

At vero poſtquam guttula LONP influxit ſitumque aſſumſit LonP, eſt ejus *aſcenſ. potent.* $= nnv$, reliquæ autem aquæ efMLonPIe (cujus quidem maſſa rurſus $= n\xi$) *aſcenſus potent.* eſt $= v + dv$; igitur *aſcenſus potent.* omnis aquæ hic conſideratæ poſt influxum guttulæ eſt $= \frac{nd\xi \times nnv + n\xi \times (v + dv)}{n\xi + nd\xi} = \frac{\xi v + \xi dv + nnvd\xi}{\xi + d\xi}$, cum ante eundem influxum fuerit $\frac{\xi v}{\xi + d\xi}$: cepit igitur incrementum $\frac{\xi dv + nnvd\xi}{\xi + d\xi}$, vel ſimplicius $\frac{\xi dv + nnvd\xi}{\xi}$. Iſtud vero incrementum æquandum eſt cum *deſcenſu actuali* quem aqua facit mutando ſitum cd MLONPIc ſitu efMLONPIe, qui deſcenſus æqualis eſt quartæ proportionali ad maſſam aquæ internæ $n\xi$, ad guttulam $nd\xi$ & altitudinem Vf vel $b - \xi$, ſic ut præfatus deſcenſus ſit $= \frac{(b - \xi)\, d\xi}{\xi}$: unde iterum habetur talis æquatio

$$\xi dv + nnvd\xi = (b - \xi)\, d\xi;$$

Hujus vero integralis poſt debitæ conſtantis additionem talis fit

$$v = \frac{b}{nn}\left(1 - \left(\frac{\alpha}{\xi}\right)^{nn}\right) - \frac{1}{nn+1}\left(\xi - \left(\frac{\alpha}{\xi}\right)^{nn} \alpha\right),$$

quam nunc pro diverſis ejus circumſtantiis perpendemus.

§. 15. Et quidem cum fuerit amplitudo tubi infinities major, quam amplitudo foraminis, patet fieri $v = \frac{b - \xi}{nn}$, & irruere proinde aquam velocitate quæ debeatur altitudini ſuperficiei externæ ſuper internam, neque tunc ultra ſuperficiem aquæ externæ fiet aſcenſus. Cum

Cum vero amplitudo foraminis rationem habet finitam ad amplitudinem tubi, aſcenſus fit ultra ſuperficiem RS veluti usque in st: minor autem ſemper erit Vt quam Vy, niſi cum omne fundum abeſt, tunc enim erit Vt = Vy. Prouti monuimus §. 5. in deſcenſu differentiam inter V Y & Vy, proportionalem eſſe & originem debere *aſcenſui potentiali* aquæ durante deſcenſu ejectæ, ita nunc obſervari poteſt in aſcenſu differentiam inter Vy & Vt originem habere ab illiſione guttularum LonP in maſſam aquæ ſuperjacentis, quæ quidem illiſio non promovet aſcenſum, ſed in inutilem motum inteſtinum impenditur, prouti indicatum fuit §. 2. Ergo cum omne fundum I M abeſt, aqua tubum eadem velocitâte ingreditur, qua jam gaudet aqua tubum antea ingreſſa & nulla fit colliſio, quæ cauſa eſt cur in iſto caſu tantum aſcendat aqua ultra ſuperficiem R S, quantum fuerat infra illam depreſſa, quod æquatio, uti mox videbimus, indicat.

§. 16. Determinabitur maximus aſcenſus st, faciendo $v = o$. Igitur ut motus omnis recte definiatur, alternatim adhibendæ erunt formulæ §. §. 3. & 14. erutæ, quod nunc hoc unico illuſtrabo exemplo, quo $nn = 1$.

Si proinde $nn = 1$, fit $v = b\left(1 - \frac{\alpha}{\xi}\right) - \frac{1}{2}\left(\xi - \frac{\alpha\alpha}{\xi}\right)$: eritque $v = o$, cum ſumitur $\xi = 2b - \alpha$, id eſt, cum ſumitur Vt = Vy. Igitur ſi verbi gratia tubus A B M I aqua plenus, omnique fundo deſtitutus fuerit ad medietatem usque immerſus aquæ exteriori, atque tota ipſius longitudo dicatur a, aqua ſic agitabitur ut primo infra T V deſcendat, ſpatio $0,297a$, deindeſimili ſpatio ſuper eandem T V elevetur, rurſusque infra eam deprimatur ſpatio $0,240a$, eodemque lineam illam iterum tranſcendat, & ſic porro.

§. 17. Patet etiam cum α eſt $= o$, tubo ſcilicet ab omni aqua vacuo, fore generaliter $v = \frac{b}{nn} - \frac{\xi}{nn+1}$: aſcenſumque integrum conſequenter fore $\frac{nn+1}{nn}b$ vel aſcenſum ſupra ſuperficiem exteriorem aquæ $= \frac{b}{nn}$.

§. 18. Venio nunc ad tubos infinite ſubmerſos, in quibus deſcenſum cum ſuis affectionibus determinavimus §. 10. Utemur autem eadem plane methodo ad hunc caſum definiendum quâ ibi uſi ſumus: erit nobis igitur depreſſio initialis Vy ($= b - \alpha$) $= c$, aſcenſus inde factus yd ($= \xi - \alpha$) $= z$.

Sic

Sic eſt $\xi = \alpha + z$ & $b = \alpha + c$, ubi quantitates z & c ſunt ceu infinite parvæ conſiderandæ ratione quantitatis α. Habetur hinc

$\left(\frac{\alpha}{\xi}\right)^{nn} = \left(\frac{\alpha}{\alpha + z}\right)^{nn} = \left(1 + \frac{z}{\alpha}\right)^{-nn} =$ adhibendo ſeriem notam & ex illa ſumendo tres primos terminos $1 - \frac{nnz}{\alpha} + \frac{nn.\overline{nn+1}zz}{2\alpha\alpha}$. Subſtitutis iſtis valoribus pro b, ξ & $\left(\frac{\alpha}{\xi}\right)^{nn}$ mutatur æquatio ultima paragraphi decimi quarti in hanc, $v = \frac{\alpha + c}{nn} \times \left(\frac{nnz}{\alpha} - \frac{nn \times \overline{nn+1}zz}{2\alpha\alpha}\right) -$

$$\frac{1}{nn+1} \times \left(\alpha + z - \alpha + nnz - \frac{nn.\overline{nn+1}zz}{2\alpha}\right) =$$

$$(\alpha + c) \times \left(\frac{z}{\alpha} - \frac{\overline{nn+1}zz}{2\alpha\alpha}\right) - \left(z - \frac{nnzz}{2\alpha}\right) =$$

$\frac{cz}{\alpha} - \frac{zz}{2\alpha} - \frac{\overline{nn+1}czz}{2\alpha\alpha}$: Poteſt autem negligi iſte ultimus terminus & ſic fit ſimpliciter

$$v = \frac{2cz - zz}{2\alpha},$$

quam æquationem n non amplius ingreditur: Neque illa differt ab æquatione pro deſcenſu §. 10. data, nempe $v = \frac{2cz - zz}{2a}$, quandoquidem quantitas a & α non differunt niſi quantitate minima $2c$.

Cæterum hic omnia etiam ſunt ſubintelligenda, quæ eodem §. 10. de tubo non nimis obſtruendo dicta ſunt.

§. 19. Sunt igitur deſcenſus & aſcenſus ſibi æquales; nam ex æquationibus noſtris patet, liquorem æqualiter librari ultra ſuperficiem aquæ externæ. Deinde vero potiſſimum ſequitur ex iſtis formulis, eſſe vel oſcillationes inæquales inter ſe iſochronas, modo omnes poſſint infinite parvæ cenſeri ratione ſubmerſionis: Pendulum autem ſimplex tautochronum eſſe ejuſdem longitudinis cum parte tubi ſubmerſa.

Differt iſtud theorema ab illo, quod §. 4. *ſect. 6.* de oſcillationibus in tubo cylindrico ex duobus cruribus verticalibus compoſito citatum fuit, in eo, quod ibi oſcillationes omnes non excluſis oſcillationibus finitæ magnitudinis ſint tautochronæ, cum in præſenti caſu oſcillationes finitæ ſint inæqualis durationis;

tionis; deinde quod ibi longitudo penduli ſit æqualis dimidiæ longitudini tubi, cum hîc ſit æqualis integræ, quamvis ſi recte res perpendatur, hic potius ſit conſenſus quam diſſenſus dicendus ob tubi, quæ in priori caſu eſt, duplicationem.

§. 20. Utroque oſcillationum genere illuſtratur natura undarum vento agitatarum: neque enim aliter moventur, quam quod aquæ in illis continue aſcendant rurſuſque deſcendant. Ita patet quod dicit Newtonus, tempora undulationum eſſe in ratione dimidiata latitudinum undarùm, quia ponit undarum formam ſibi conſtanter eſſe ſimilem & proinde earum latitudinem proportionalem profunditati, ad quam aquæ agitantur. Veriſimile autem eſt profunditatem eam eſſe, quæ pendulo ſimplici cum undis tautochrono, nempe *v.gr.* $60\frac{1}{2}$ *ped. Pariſ.* ſi ſingulis binis ſecundis fiat undarum aſcenſus deſcenſuſve.

§. 21. Quamvis noluèrim ad prolixitatem calculi evitandam, hoc argumentum in omni ſua extenſione proſequi, propterque ea de cylindricis vaſis tantum egerim, attamen quia in caſu ſubmerſionis infinitæ, enunciationes & theoremata parum de ſua concinnitate perdunt, ſuperaddam theorema generale pro oſcillationibus aquæ in tubo utcunque inæquali, omiſſa tamen demonſtratione, quæ ex alibi dictis unicuique obvia erit, præſertim vero ex iis quæ in *Sect.* 6. §. §. 6. 7. & *ſeqq.* uſque ad 20. expoſita fuerunt. Faciendum autem eſt, ut cylindricæ ſit ſtructuræ pars illa vaſis ſuperior, in quâ excurſiones fiunt.

§. 22. Fuerit igitur bd longitudo vaſis ſubmerſi (Fig. 35. *b*) Repræſentet bF ejus amplitudinem in loco ſuperficiei, ponaturque vas ita formatum, ut ſit curva FGH ſcala amplitudinum: ſumatur linea bc fiatque curva LMN, cujus applicata cM ſit ubique $= \frac{bF^2}{cG}$, & erit longitudo penduli iſochroni cum oſcillationibus aqueæ ſuperficiei = ſpatio bd NL diviſo per bL.

Corollarium.

§. 23. Ex præcedente paragrapho ſequitur, ſi tubus ſubmerſus conicus fuerit, habeatque amplitudinem in regione aquæ ſuperficiei, quæ ſit ad orificium ſubmerſum ut m ad n, fore longitudinem penduli Iſochroni cum vibrante aqua ad longitudinem ſubmerſi tubi, ut $\sqrt{m}$ ad $\sqrt{n}$, id eſt, ut radices prædictarum amplitudinum, atque ſi tubus idem ſitu, modo recto modo

do

do inverſo, ſubmergatur tantum non totus, fore longitudines pendulorum iſochronorum in ratione contraria orificiorum ſubmerſorum.

Scholium Generale.

§. 24. Quæ in hac ſectione continentur, quia novis hypotheſibus innituntur pleraque, eo magis operæ pretium erit experimentis tentare. Ego quidem diverſa inſtitui, non vacavit autem ſingula quæ mente conceperam exequi: quæ feci inferius recenſebo; Interim ut tutius judicium ferri poſſit de conſenſu experimentorum cum theoria, diſpiciendum prius erit pro rerum circumſtantiis, an & quantum fere contractio venæ effluentis (cujus naturam expoſui in *ſect.* 4.) calculum turbare poſſit: quod incommodum maxima parte tolli poterit, ſi fiat ut orificii inferioris latera parvulum aliquem cylindrum efforment, vix dimidiæ lineæ altitudinis, qua de re animo revolvatur experimentum quartum ad ſectionem quartam pertinens. Deinde etiam animus advertendus ad reſiſtentias ab adhæſione aquæ oriundas, quæ quidem parum retardant motus, ſi tempora oſcillationum reſpicias, multum autem excurſionibus detrahunt, præſertim ſi tubi ſtrictiores & longiores ſumantur. Igitur magis fidendum erit experimentis, quæ circa oſcillationum tempora facta fuerint, quia hæc tempora à diminutione excurſionum non multum admodum alterantur. Ratione primi experimentorum generis, quo excurſiones fluidorum in tubis, tam deſcenſus quam aſcenſus inquirendi obſervandique veniunt, hâc uſus fui circumſpectione, ut filum tubo circumvolverem eo in loco, ad quem aquas deſcenſuras vel aſcenſuras eſſe expectabam, idemque filum poſt ſæpe repetitum experimentum ita tandem locavi, ut ſuperficies fluidi oſcillantis nec ultra nec citra excurreret. Reliqua etiam loca, quæ in tubo obſervanda erant, pariter filo circumvoluto notavi. Quod deinde ad tempora oſcillationum pertinet, quia hæ citiſſime decreſcunt fiuntque imperceptibiles & plane nullæ, non potui illa aliter inquirere, quam explorando poſt ſæpiſſime iteratum experimentum longitudinem penduli ſimplicis iſochroni, quod dum oſcillabat digitum orificio tubi ſuperimpoſui eumque eo præciſe temporis puncto removi, ut & pendulum & fluidum oſcillationem ſimul inciperent.

EXPERIMENTA
Ad ſect. ſept. referenda.

Experimentum 1.

Tubum adhibui vitreum cylindricum diametri fere quatuor linearum, inferius totum apertum. Eum aquæ, in vaſe pellucido ampliſſimo ſtagnanti, ſubmerſi ad altitudinem 44. *lin.* digitumque orificio admovi ſuperno, ne extrahendo tubi partem deſcenderet in illo aqua: extraxi deinceps tubum ad alt. 22. *lin.* ita ut tam pars tubi ſubmerſa, quam altitudo aquæ internæ ſupra externam eſſet 22. *lin.* moxque remoto digito obſervavi deſcenſum ſuperficiei in tubo infra ſuperficiem aquæ ſtagnantis eumque vidi fuiſſe $9\frac{1}{2}$ *lin,*

Debuiſſet autem vi §. §. 7. & 17. deſcendere tredecim lineis; Defectus trium linearum cum dimidia unice fere adhæſioni aquæ ad latera tubi tribuendus videtur.

Obſervato deſcenſu totum experimentum repetii, ut aſcenſum quoque proximum experirer: Viſus autem mihi fuit 8. *lin.* qui vi paragraphi decimi ſexti, habito reſpectu ad prævium deſcenſum, eſſe debuerat $9\frac{1}{2}$ *lin.* nempe tantus, quantus fuit præcedens deſcenſus. Hic vero experimentum unica tantum linea cum dimidia defecit, cum in prima experimenti parte ad tres uſque lineas cum dimidia defectus adfuit, quia nimirum major ibi facta fuit excurſio eaque velocitate majori, ita ut impedimenta, quæ una cum velocitatibus creſcunt, admodum majora offenderit.

Experimentum 2.

Eodem tubo uſus ſum, ſed eo lamina munito, quæ foramine erat pertuſa amplitudine $\sqrt{\frac{1}{2}}$ ratione amplitudinis tubi, cum ſuperficies tubi eſſet octodecim lineis elevata ſupra aquam ſtagnantem, totidemque lineis fundum ſubmerſum, vidi ſuperficiem tubi in deſcenſu quinque fere lineis infra aquam ſtagnantem deſcendiſſe.

Paragraphus octavus autem deſcenſum arguit $7\frac{1}{2}$ *lin.* defectum, qui plusquam $2\frac{1}{2}$ *lin.* fuit, rurſus adhæſioni aquæ ad latera tubi adſcribo.

Deinde

Deinde tubum hunc eadem lamina inſtructum admoto ſuperius digito aquæ immiſi ad profunditatem 18. *lin.* totum ab aquâ vacuum : remoto digito emerſit ſuperficies tubi ſupra aquam ſtagnantem integris octo lineis, cum §. 17. earum novem indicat pro iſto caſu.

Quod hic defectus minor admodum fuerit, quam in deſcenſu, rationi adſcripſi, quam prolixe paragrapho decimo tertio indicavi, cum dicerem motum paullo majorem oriturum, cum foramen amplitudinem reſpectu tubi notabilem veluti in ratione $\sqrt{\frac{1}{2}}$ ad 1, aut circiter habuerit, quam qui ex hypotheſi ſequitur : atque ut ea de re certus plane fierem, tubum adhibui breviorem & ampliorem, ut omnis fere impedimentis alienis effectus præriperetur, & experimentum cepi, quod ſequitur.

Experimentum 3.

Tubum adhibui cujus diameter erat plus quam ſeptem linearum, quem ex ferro confieri curavi, quia vitreus bene cylindricus non fuit ad manus : longitudo ejus fuit quatuor pollicum cum ſex lineis & ſemiſſe : amplitudo ejus ratione foraminis indicata per n fuit $= 1, 860$ & $nn = 3, 458$.

De iſto tubo experimentum ita ſumſi :

Obturato ſcilicet orificio ſuperiori identidem tentavi, ad quam profunditatem ſubmergendus eſſet aquæ in arca ampliſſima ſtagnanti, ut remoto protinus digito, qui orificium obtegebat, aqua ad limbum ejusdem orificii præciſe aſcenderet, nihilque præterflueret. Iſtam vero profunditatem expertus ſum 3. *poll.* cum tribus *lineis*; fuit igitur aſcenſus ſupra aquam externam unius pollicis & trium linearum cum dimidia, cum vel omnibus remotis impedimentis parum ultra undecim lineas aſcenſus fieri debuerit vi paragraphi 17. Recte igitur præmonitum fuit §. 13. non poſſe non aſcenſus fieri paullo majores in iſtiusmodi caſibus, quam hypotheſis poſtulat. Mox eidem tubo aliud applicui fundum; erat jam $n = 3, 68$, & $nn = 13, 54$: difficile fuit experimenti ſucceſſum recte dignoſcere, quia ſuperficies in tubo aſcendens ſemper fuit bullata : viſum tamen fuit, tubum nunc immergendum fuiſſe ad altitudinem 4. *poll.* cum duabus tribuſue lineis, manentibus ſic extra aquam præterpropter quatuor lineis, prorſus ut theoria indicat.

Experimentum 4.

Tubum cylindricum vitreum, qui tres præterpropter lineas habebat in diametro immerſi ad altitudinem 20. *poll.* fecique, ut aqua in illo libraretur, elevata prius aquâ ad altitudinem unius fere pollicis. Ultra quatuor vel quinque itus reditusque bene notabiles non fecit, nec adeoque omni rigore longitudinem penduli ſimplicis iſochroni examinare potui; mihi tamen illa viſa fuit 22. aut 23. pollicum; ex quo intuli adhæſionem aquæ ad latera tubi non ſolum diminuere excurſiones, ſed & morari pauliſper tempora oſcillationum: debuiſſet enim ſecundum §. 19. eſſe præfata longitudo viginti tantummodo pollicum. Idem expertus ſum in oſcillationibus, quas in ſuperiori ſectione pertractavimus.

Cæterum obturato vel ad dimidium fere orificio inferiori, obſervare non potui, excurſiones inde fuiſſe diminutas aut oſcillationes retardatas, quod conforme eſt cum iis, quæ §. §. 7. & 18. habentur.

Experimentum 5.

Tubum conicum longitudine 21. *poll.* immerſi aquæ orificio ampliore, ita ut unicus pollex extra aquam emineret: fuit autem alterum orificium alterius paululum plusquam duplum. Longitudinem penduli iſochroni cum vibrationibus aquæ in tubo libratæ inveni quindecim *poll.* debuiſſet autem ſecundum §. 23. eſſe eadem longitudo paullo minor quatuordecim pollicibus. Denique ſimiliter eodem tubo uſus, ſed ſitu inverſo, deprehendi longitudinem penduli iſochroni tantillo plusquam duplam ejus, quæ antea fuerat, prouti citato paragrapho indicatur.

HYDRODYNAMICÆ
SECTIO OCTAVA.

De motu fluidorum cum homogeneorum tum heterogeneorum per vaſa irregularis & præruptæ ſtructuræ, ubi ex theoria virium vivarum, quarum pars continue abſorbeatur, explicantur præcipue Phænomena ſingularia fluidorum, per plurima foramina trajectorum, præmiſſis regulis generalibus pro motibus fluidorum ubique definiendis.

§. I.

ALiis adhuc principiis præter quam in ſectione proxime præcedente uſi non ſumus, quam hiſce duobus *quod velocitates fluidorum ſint ubique reciproce proportionales amplitudinibus vaſorum*, cujus ope invenitur *aſcenſus potentialis* totius aquæ ex dato *aſcenſu potentiali* cujusvis particulæ; tum quod *aſcenſus pot.* totius aquæ perpetuo æqualis maneat *deſcenſui actuali*. Quoties ambo hæc principia locum habent, minime dubitandum eſt, quin methodo à nobis adhibita motus fluidorum recte definiatur. Non diffitebor tamen, hujusmodi fieri poſſe ſtructuræ vaſa, in quibus fluida moventur, ut neutrum iſtorum principiorum recte procedat. Prius equidem raro aut nunquam notabiliter à vero abducit, quia ubicunque locum non habet, ibi nullum fere aquæ habere ſolent motum, poſſuntque ſine ſenſibili errore ceu ſtagnantes conſiderari: Longe vero aliter comparatum eſt alterum principium, quod apparebit ex inferioribus exemplis, & cujus rei luculentum eſſe poſſunt teſtimonium ea, quæ in ſuperiori ſectione protulimus circa refluxum aquarum; tantum enim abeſt, ut aquæ in vaſe ſubmerſo ex data altitudine delapſæ, ad hanc altitudinem regredi poſſint, prouti vi iſtius principii deberent, ſublatis impedimentis extrinſecis, quin potius plerunque vix ſenſibilis ſit earum aſcenſus præ deſcenſu, quem antea fecerunt: imo nequidem aſcendere ſuperficies aquæ poteſt tan-

tantum ſupra aquam, cui tubus immergitur, quantum infra eandem depreſſa fuerat, niſi cum tubus totus eſt apertus: iſta vero ſuperficies multo minus deprimitur quam antea fuerat elevata. Horum rationem dedimus in ſuperiori ſectione: Hæc quia ita ſunt, regulas nunc dabo duas pro motu aquarum ubique definiendo, easque porro exemplis illuſtrabo talibus, quæ nulla adhuc theoria explicari potuerunt, cum noſtra autem egregie admodum conveniunt.

Regula 1.

§. 2. Diſpiciendum eſt, aſſumta alicubi in vaſe propoſito velocitate fluidi ceu cognita, quænam reliquis fluidi partibus futura ſit velocitas. Ita enim cognoſcetur *aſcenſus potentialis* totius fluidi ejusque incrementum. Hactenus conſideravimus fluida in infinita ſtrata parallela vel potius ad latera vaſis ubique perpendicularia diviſa, ſtatuimusque velocitates hiſce ſtratis reciproce proportionales: Facile quidem eſt vaſa effingere, ubi aliter moventur fluida; crediderim autem his in locis motum notabilem nunquam habere fluida ita, ut error ex iſta hypotheſi ſenſibilis naſci fere non poſſit: poterit tamen majoris accurationis ergo præfata regula adhiberi. Præſertim vero huc pertinet contractio venarum, cum fluida per foramina in tenuibus admodum laminis facta tranſire coguntur, qua in re magna eſt adhibenda circumſpectio: Effectus hujusmodi contractionum haud male, puto, prævidebuntur, cum recte perpenſa fuerint, quæ in ſectione quarta de illis monui.

Regula 2.

§. 3. Singulis momentis diſpiciendum eſt, quantum *vis vivæ*, ſeu quodnam productum ex *aſcenſu potentiali* in maſſam oriatur ad fluxum præcipuum, cujus natura quæritur, nihil conferens. Id vero rurſus uniuscujusque circumſpectæ æſtimationi relinquendum eſt. Quod ſic oritur, addendum eſt facto ex *aſcenſu potentiali*, quem motus præcipuus involvit, in maſſam, aggregatumque productorum demum æquale cenſendum eſt facto ex maſsâ omnis aquæ in ejusdem *deſcenſum actualem.*

Magni profecto eſt momenti hæc regula, & ut puto, fere unica ad motuum menſuras obtinendas, qui in vaſis irregularibus, pluribusque cavitatibus inter ſe communicantibus diviſis fiunt, quod nunc pluribus illuſtrabo exemplis.

Pro-

Problema.

§. 4. Propoſitum fuerit vas ACRB (Fig 37.) infinitæ quaſi ratione foraminum mox dicendorum ubique amplitudinis & diaphragmate aliquo EF in duas diſtinctum cavitates inter ſe communicantes, mediante foramine G: habeat præterea vas iſtud in infima ſui parte aliud foramen D: deinde ponatur vas aquâ plenum uſque in PQ, ſic ut cavitas inferior CEFR tota ſit humido repleta, atque inſuper diaphragmati ſuperjaceat pars altera PQFE. His poſitis, fluidoque jam moveri incipiente, quæritur velocitas aquæ per foramen D in aërem effluentis vel altitudo genitrix hujus velocitatis. Fig. 37.

Solutio.

Fuerit altitudo ſuperficiei PQ ſupra foramen D $= x$, amplitudo foraminis D $= n$, alteriusque G $= m$. Perſpicuum autem eſt *aſcenſum potentialem* cujuſvis guttæ per G transfluentis nihil promovere effluxum per D, totumque impendi in motum aliquem excitandum inteſtinum, qui mox abſorbetur ſine alio effectu: neceſſe igitur eſt ut ſingulis momentis motus generetur novus in particulis foramen G tranſeuntibus, non minus atque in particulis per D effluentibus. Sed ſi *aſcenſus potentialis* guttulæ per D effluentis dicatur v, id eſt, ſi aqua exilire ponatur per D velocitate, cujus altitudo genitrix ſit v, erit ſimilis altitudo ratione guttulæ mole ſua priori æqualis, per G eodem tempore transfluentis $\frac{nnv}{mm}$. Multiplicatis iſtis *aſcenſibus potentialibus* per maſſam, quam æqualem habent, quamque vocabo M, erit aggregatum productorum $= Mv + \frac{Mnnv}{mm}$. Et cum ob infinitam amplitudinem vaſis alius motus non generetur, erit præfatum aggregatum (per *reg.* 2.) cenſendum æquale facto ex maſſa omnis aquæ in ejusdem *deſcenſum actualem*. At vero ſi maſſa omnis aquæ dicatur μ, erit (per § 7. *Sect.* 3.) *deſcenſus actualis*, qui fit dum guttula M effluit $= \frac{Mx}{\mu}$, ita ut productum commune ſit $= Mx$. Igitur habetur

$$Mv + \frac{Mnnv}{mm} = Mx, \quad \text{ſive} \quad v = \frac{mmx}{nn+mm}. \qquad \text{Q. E. F.}$$

Scholium I.

§. 5. Apparet ex iſto exemplo, motum ſine calculo differentiali de-

terminari poſſe, cum figura vaſis ubique ampliſſimi motum hunc mutare non poteſt. Interim difficile futurum non fuiſſet, conſideratione quoque habita ad amplitudines vaſis, fluxum definire, & ſolo brevitatis ſtudio id vitavimus pariterque omittemus in ſequentibus, niſi fortaſſe motus notabiliter à figura vaſis varia mutetur, quod fieri poteſt in tubis ſatis amplis, ſed iis longiſſimis, in quibus fluidum movetur, præſertim ſi motus determinandi ſint oſcillatorii. Imo vidimus in præcedente Sectione, ſi oſcillationes ſint valde parvæ in tubis profundiſſime ſubmerſis, tunc tantum abeſſe, ut ad ſolum foramen fundi ſit attendendum, neglectis amplitudinibus etiamſi ſatis magnis, quin potius ad has ſolas fere ſit reſpiciendum.

Scholium 2.

§. 6. Quia in calculo, quem poſuimus, *vis viva* cujuſvis guttulæ per G transfluentis ab aqua cavitatis inferioris abſorberi debet, perſpicuum eſt, propoſitionem non eſſe extendendam ad illos caſus, qui hypotheſi repugnent, veluti cum diaphragma E F fundo C R proximum eſt ſimulque foramina ſibi directe reſpondent: ita enim non arduum eſt providere, motum longe diverſum fore ab eo, quem præſens theoria indicat. At vero, ſi diſtantia D G magna ſit, ſique ſimul foraminum ſitus ſit obliquus & latera foraminum venis aqueis negent contractionem; dubium nullum eſt, quin theoria accurate omnibus phænomenis reſpondeat.

Corollarium.

§. 7. Si foramen G eſt admodum amplum præ altero, fit fere $v = x$, ſed hæc altitudo v, cui nimirum reſpondet velocitas aquæ per D effluentis, non parum decreſcit, creſcente foramine D, ita ut ſi fuerit *v. gr.* duplum foraminis G, ſit $v = \frac{1}{5}x$ & tantum non tota evaneſcat, cum foramen G eſt valde exiguum reſpectu foraminis D.

His ita inventis, jam quivis veram perſpiciet rationem motuum illorum, quos Mariottus primus obſervavit, & quibus ceu valde *admirabilibus* teſtatur ſe ſupra modum fuiſſe delectatum, ſimulque intelliget, quam longe Auctor iſte in reliquis perſpicaciſſimus à viâ aberraverit in hiſce diſquiſitionibus. Non abs re fore puto obſervata Mariotti hic apponere.

Fig. 38. §. 8. Vas adhibuit, quale repræſentat Figura trigeſima octava, quæ non

non differt à priori niſi in eo, quod in ima parte cylindro A B C tubus horizontalis M D inſertus ſit perforatus lumine D, per quod aquæ verticaliter exiliunt: Diaphragma vero E F in medio perforatum eſt lumine G ut antea: infra illud parvulum erat foramen K, ut facilius cavitas inferior aquis impleri poſſet, quo facto idem obturabatur, reliquumque vaſis replebatur.

His ita præparatis, effluentibusque aquis per D, obſervavit Mariottus, mox illas aſcendiſſe uſque in I, deinde ſenſim imminuta velocitate uſque in N & tandem, imminente depletione tota cavitatis ſuperioris, A B F E uſque in O, tuncque aſſumtis confeſtim novis viribus aſſiliviſſe fere uſque in F. Animadvertit etiam, ſi bene memini, altitudinem jactus initialis eo minorem eſſe, quo minus ſit foramen G, ratione alterius D. Videatur ejus *tract. de motu aquarum part. IV. diſc.* 1. Putat autem horum motuum mutationes explicari poſſe fingendo vaſi A B F E ampliſſimo tubum ſtrictiorem adhærere G L M D, per quem aquæ fluant. At vero demonſtravimus & experientia quotidie docet, motum aquarum ex vaſe A B G L M D admodum diverſum eſſe ab eo, qui modo indicatus fuit. Non minus falleretur ſi quis putaret aquam eadem velocitate exilire per foramen D, quaſi illud in diaphragmate E F poſitum eſſet, nam fieri poteſt, ut altitudo jactus initialis ſit major & minor altitudine F B. Nec denique ea effluent aquæ quantitate, uti facile quis ſuſpicari poſſet, qua eodem tempore effluerent ex vaſe ſuperiori ſimplici reſciſſa parte E F D C quamvis ita proxime ſe res habeat, cum foramen G admodum minus eſt foramine D.

§ 9. Noſtra vero æquatio, nempe $v = \frac{mmx}{nn + mm}$, recte omnino reſpondet phænomenis: indicat enim aquam mox ab initio fluxus ad certam aſcendere altitudinem, eamque tanto minorem, quanto minus eſt foramen diaphragmatis præ foramine altero; dein iſtum aſcenſum ſenſim diminui, donec aqua omnis ex cavitate ſuperiori effluxerit, quo ipſo momento protinus augmentum capit, totamque aquæ ſuperincumbentis altitudinem tantum non attingit, quia tunc ex vaſe ſimplici eoque infinite amplo effluere cenſendæ ſunt aquæ: pauliſper tamen etiamnum retardantur aquæ à tranſitu aëris per foramen G, & ſane notabiliter retardantur, cum foramen ſuperius valde parvum eſt, de quo argumento mox quædam dicemus, cum de fluidis heterogeneis ſermo erit. Si figura Mariotti debita proportione reſpondeat argumento inſtituto, oportet, ut foramen G alterius fecerit paullo pluſquam dimidium.

§. 10. Indicat porro formula noſtra, quod multis fortaſſe nondum perſpectâ hâc theoriâ ſatis paradoxum videri potuiſſet, ſitum diaphragmatis EF ſive altiorem ſive humiliorem nullo modo mutare impetum ſive velocitatem aquæ effluentis; ratio autem iſtius phænomeni omnibus nunc, puto, manifeſta eſt.

§. 11. Jam vero examinabimus inſuper motum aquarum, cum plura ſunt diaphragmata foraminibus pertuſa, per quæ aquæ tranſire cogantur, ut effluxus per foramen D fieri poſſit. Poterit id eodem abſolvi modo, quo uſi ſumus in problemate §. 4. Ita autem inſtituto recte calculo retentisque denominationibus ibidem adhibitis apparebit eſſe

$$v = x : \left(1 + \frac{nn}{\alpha\alpha} + \frac{nn}{\beta\beta} + \frac{nn}{\gamma\gamma} + \&c.\right)$$

ubi per α, β, γ &c. intelliguntur amplitudines foraminum, quæ ſunt in diaphragmatibus, dum n exprimit ut antea amplitudinem foraminis D, per quod aquæ effluunt.

§. 12. Si proinde loco unius diaphragmatis ſint in ſimili vaſe, quale
Fig. 39. (Fig. 39.) repræſentat, plura diaphragmata veluti in B, C, R &c. per quæ aqua transfluat, dum per infimum foramen D effluit, mutabitur & augebitur confeſtim velocitas aquæ effluentis, quoties aliqua cavitas depletur: talis autem eſſe poteſt proportio inter altitudines AB, BC, CR, RE &c. atque amplitudines foraminum D, G, F, H &c. ut ſemper, quoties nova depleri incipit concameratio, vena effluens ad eandem altitudinem O aſſurgat, ſeu eadem velocitate effluat. Id vero obtinetur (deſignatis amplitudinibus foraminum D, G, F, H &c. per n, α, β, γ, &c.) faciendo

$$BC = \frac{nn}{\alpha\alpha} AB;\ CR = \frac{nn}{\beta\beta} AB;\ RE = \frac{nn}{\gamma\gamma} AB\ \&c.$$

ita ut poſitis foraminibus inter ſe æqualibus ſint pariter lineæ AB, BC, CR, RE &c. inter ſe æquales faciendæ. Facile quoque erit in vaſe cylindrico eam conciliare foraminibus magnitudinem, ut ſuperficies fluidi eodem tempore ab uno diaphragmate ad ſubſequens quodcunque deſcendat, & cum hæc diaphragmata æqualiter à ſe invicem & à fundo diſtant, uniformis clepſydrarum ſtructura excogitari poteſt.

§. 13. Si vero omnia diaphragmata altiſſime poſita ſint, jucundus erit luſus

luſus hydraulicus, venam proſilientem D O videre, quæ æqualibus incrementis æqualibusque temporum intervallis, quod utrumque fieri poteſt, ſubſultim creſcat.

§. 14. Propoſitum nunc ſit motum fluidi exilientis indagare, cum per ſingula foramina alia atque alia fluida transfluunt. Fluida autem leviora continue ponenda eſſe apparet, quo ſunt altius poſita, ne motus turbetur, quod fit cum eodem tempore fluidum inferius aſcendit, ſuperiore deſcendente, per commune foramen. Innoteſcet hoc modo quisnam ſit motus in aquis ex vaſe effluentibus undique clauſo præter foraminulum aliquod ſuperne exiſtens, quod aëri tranſitum concedit. Hypotheſin vero infinitæ vaſis cylindrici amplitudinis ratione foraminum retinebimus, atque porro gravitatem ſpecificam fluidi per D exilientis deſignabimus per A, illiusque quod per G transfluit notabimus littera B, ſimiliterque gravitates ſpecificas fluidorum per foramina, F, H, &c. fluentium indicabimus reſpective litteris C, D, &c. Denique cum etiam conſiderandæ hic ſint altitudines diverſorum fluidorum, quorum quidem, ob figuram vaſis cylindricam ſolum infimum effluens altitudinem mutat, vocabimus x altitudinem fluidi infimi ſupra foramen D, fluidorum reliquorum, eo quo ſibi ſuperincumbunt ordine, altitudines deſignabimus reſpective per b, c, d &c. reliquas denominationes paragraphi undecimi retinebimus; quibus ita præparatis computus inſtituetur ut §. 4. factum eſt, neque enim quicquam aliud inſuper obſervandum eſt, quam ut maſſæ guttularum iisdem tempusculis per diverſa foramina transeuntium non ſimpliciter ex mole, ſed etiam ex gravitate ſpecificia æſtimentur: *deſcenſus* autem *actualis* pro ſingulis fluidis erit ſeorſim ſumendus: Hiſce veſtigiis inſiſtendo reperitur talis primo æquatio

$$Av+\frac{nn}{\alpha\alpha}Bv+\frac{nn}{\mathfrak{G}\mathfrak{G}}Cv+\frac{nn}{\gamma\gamma}Dv+\&c. = Ax+Bb+Cc+Dd, +\&c.$$

quæ reducta dat

$$v=(Ax+Bb+Cc+Dd+\&c.):(A+\frac{nn}{\alpha\alpha}B+\frac{nn}{\mathfrak{G}\mathfrak{G}}C+\frac{nn}{\gamma\gamma}D+\&c.)$$

§. 15. Si duo ſint liquores, erunt duo termini tam in numeratore quam in denominatore ſumendi & tres termini cum tres fuerint liquores, atque ſic porro: Si proinde liquor effluens ſit, v. gr. mercurius, ipſique ſuperincumbat aqua ſtatuanturque gravitates ſpecificæ horum liquorum ut 14. ad 1. fiet

v =

$$v = \frac{14x + b}{14 + \frac{nn}{\alpha\alpha}}$$

atque ſi ratio foraminum D & G fuerit ex gr. ut 3 ad 1, fiet

$$v = \frac{14x + b}{23}$$

§. 16. Patet quoque ratiocinium iſtud non excludere eos caſus, quibus fluida ſuperiora ſunt inferioribus ſpecifice graviora, modo fluida inferiora non aſcendant per eadem foramina, per quæ ſuperiora deſcendunt: neque vero id futurum eſſe præſumo (nec tamen affirmo) cum loco ſimplicis foraminis tubulus ſit quamvis exiguæ altitudinis, per quem liquor ſuperior deſcendat in inferiorem cavitatem, veluti in fig. 40. ubi quidem duo tantum liquores conſiderantur.

Hic autem altitudo C R variabilis eſt, & altitudo A C conſtans; interim tamen uniformitatis litterarum gratia vocabimus altitudinem A C $= x$, alteram C R $= b$; gravitatem ſpecificam fluidi per D erumpentis faciemus rurſus $=$ A, alteriusque fluidi per G transeuntis $=$ B, & erit altitudo D O ſeu

$$v = \frac{Ax + Bb}{A + \frac{nn}{\alpha\alpha}B}$$

Igitur ſi per foramina D & G reſpective fluant aqua & mèrcurius erit nunc

$$v = \frac{x + 14b}{1 + \frac{14nn}{\alpha\alpha}}.$$

§. 17. Ut porro innoteſcat motus fluidi ſimplicis ex vaſe ſuperne parvulo foramine aërem admittente, obſervandum eſt, nullam hic altitudinem eſſe b; quia aër utrique orificio incumbere ad eandem altitudinem cenſeri poteſt, erit proinde

$$v = \frac{Ax}{A + \frac{nn}{\alpha\alpha}B}$$

atque ſi fuerit $\frac{A}{B} = 850$, quæ præterpropter ſolet eſſe proportio inter gravitates ſpecificas aquæ & aëris, erit

$$v = \frac{850x}{850 + \frac{nn}{\alpha\alpha}};$$

§. 18.

§. 18. Omnia hæc principia, quæ hactenus adhibuimus, facile ut jam dixi extenduntur ad vaſa, quæ finitam ratione foraminum habent amplitudinem; Poteſt autem eorum veritas alio etiam modo admodum diverſo evinci, uti oſtendam, cum ad *hydraulico-ſtaticam* pervenero, quia altero illo demonſtrandi modo preſſiones fluidorum in ſingulis vaſis partibus magis fiunt perſpicuæ; differunt autem horum fluidorum regulæ ſtaticæ vehementer à legibus, quæ fluidis ſtagnantibus debentur.

Cæterum habent hæc ſuam utilitatem ad machinas hydraulicas recte perſpiciendas; neque enim ſatis ad hæc attenti fuiſſe videntur artifices: dabitur autem occaſio de iis uberius differendi in ſequenti ſectione, ubi calculum ponemus, quantum vis in propellendis aquis adhibitæ perdatur à tranſitu aquæ per plura foramina, oſtenſuri ſimul remedia adhibenda, ut illud virium detrimentum, quantum fieri poteſt, diminuatur. Prius vero alia quædam vaſa compoſita in hâc Sectione conſiderabimus, quam ad hæc deſcendamus.

§. 19. Fit aliquando, ut vaſa juxta ſe poſita aquas unum ex altero recipiant effluxuras demum ex ultimo. Hoſce vero motus jam exemplo illuſtrabimus.

Propoſitum fuerit vas cujuſcunque formæ A G M B (Fig. 41.) quod nova aquarum affuſione conſtanter plenum conſervatur uſque in A B. Ex eodem interim vaſe fluidum tranſire intelligatur per foramen M in aliud vas contiguum B M N C & ex hoc rurſus in aliud C N R D per foramen N & ſic porro, donec tandem aquæ in aërem ejiciantur, quæranturque loca ſuperficierum H L, P Q, &c. poſtquam fuerunt ad ſtatum *permanentiæ* reducta. Quæſtio autem ſic ſolvetur. Fig. 41.

Perſpicuum nempe eſt ex eo, quod ſuperficies A B, H L, P Q, &c. in eodem loco permanent, aquas iis tranſire per foramina M, N, R velocitatibus, quæ debeantur altitudinibus B H, L P, Q R, ſi modo tranſitus aquarum per unum foramen non acceleret earundem fluxum per foramen proximum, quod certe non fiet, niſi expreſſe opera detur, ut id aliquantum fiat. Præterea vero conſiderandum eſt, velocitates aquarum per foramina transfluentium reciproce eſſe foraminibus proportionales, quia in ſtatu *permanentiæ* eodem tempore eædem aquarum quantitates per ſingula foramina trajiciuntur. Ex iſtis intelligitur, deſigna-

natis amplitudinibus foraminum M, N, R, per m, n, p, fore LP $= \frac{mm}{nn} \times BH$; $QR = \frac{mm}{pp} \times BH$: Eſt vero $BH + LP + QR$ æqualis altitudini ſuperficiei AB ſupra foramen ultimum R ſeu DR; erit igitur

$$BH + \frac{mm}{nn} \times BH + \frac{mm}{pp} \times BH = DR,$$

& proinde $BH = DR : \left(1 + \frac{mm}{nn} + \frac{mm}{pp}\right)$; pariterque

$$LP = \frac{mm}{nn} \times DR : \left(1 + \frac{mm}{nn} + \frac{mm}{pp}\right) \text{ atque}$$

$$QR = \frac{mm}{pp} \times DR : \left(1 + \frac{mm}{nn} + \frac{mm}{pp}\right), \text{ ſeu}$$

$$BH = DR : \left(1 + \frac{mm}{nn} + \frac{mm}{pp}\right)$$

$$LP = DR \cdot \left(1 + \frac{nn}{mm} + \frac{nn}{pp}\right)$$

$$QR = DR : \left(1 + \frac{pp}{nn} + \frac{pp}{mm}\right)$$

atque ſic determinantur ſitus invariabiles ſuperficierum HL, PQ, &c. At quanto tempore id fiat, ſi aliter ſuperficies illæ ſint poſitæ & quænam interea aquæ quantitas per ſingula foramina fluat, inferius examinabimus unà cum aliis quæſtionibus eo pertinentibus: Jam vero ex allatis valoribus altitudinum BH, LP, QR &c. præcipuas affectiones deducemus.

§. 20. I. Cum ſingula foramina ſunt inter ſe æque ampla, erit $BH = LP = QR$ &c. & quævis iſtarum altitudinum toties continebitur in altitudine DR, quoties vaſa replicantur.

II. Si vero aliquod foraminum ſit infinite parvum ratione reliquorum, erunt omnes ſuperficies, quæ ſunt cis foramen poſitæ, in eadem altitudine cum prima ſuperficie AB: reliquæ autem fundo GR erunt proximæ.

III. Si canalis fingatur continuus per ſingula foramina M, N, R &c. tranſiens, intelligitur, aquam per orificium canalis effluere debere velocitate, quæ debeatur toti altitudini DR. In noſtro vero caſu ea velocitas reſpondet tantum altitudini QR, cujus rei ratio & origo eſt, quod *aſcenſus potentialis* ſingularum guttularum per foramina, excepto ſolo foramine effluxus, transfluentium

tium abſorbeatur. Igitur vis viva quæ ſingulis momentis perditur eſt ad vim vivam quæ ſingulis momentis generatur, ut D Q ad D R. Altitudines vero B H, L P, &c. repræſentant *reſpective* vim vivam, quæ continue guttulis per foramina M, N transfluentibus ſeparatim demitur. Puto tamen ſi foramina fuerint fere æqualia, eorumque centra in rectam lineam poſita, ac denique parietes B M, C N, D R non admodum à ſe invicem remoti ſint, fieri poſſe, ut aliquanto majori velocitate aquæ erumpant, quam theoria iſta indicat: In reliquis caſibus non dubito de ejusdem accuratione, abſtrahendo animum ab impedimentis ſæpe indicatis.

IV. Denique perſpicuum eſt, quoties ſuperficies aquæ H L, P Q &c. ſitum ſuum mutant ſive plures, ſive una ſola, mox omnes ſuperficies loca mutaturas eſſe, donec eo quo dictum fuit modo fuerint ad æquilibrium repoſitæ. Mutationes autem iſtas generaliter definire nodoſi æque ac prolixi eſt calculi, niſi vaſa ponantur priſmatica & infinitæ quaſi amplitudinis ratione foraminum, ut nempe incrementa *aſcenſuum potentialium* aquarum M L, N Q &c. quæ locum mutant, negligi poſſint ratione *aſcenſuum potentialium*, qui in guttulis per M, N, R transfluentibus perpetuo generantur. Neque profecto reſtrictio hæc afficere nos debet, cum paſſim jam viderimus in vaſis vel mediocriter admodum amplis poſſe ſine ſenſibili errore incrementa motus maſſarum internarum rejici in calculo. Omittam igitur ſolutionem generalem, quæ mihi eſt, ob nimiam ejus prolixitatem, atque ut in hâc ſectione adhuc feci, vaſa ceu infinite ampla & quidem ad majorem concinnitatem priſmatica ponam. Incipiam autem à vaſe bifido.

§. 21. Repræſentatur hujusmodi vas bifidum (Fig. 42.) cujus pars A M aquis plena, altera B N ſaltem usque ad H L repleta ponitur, cum jam fluxus per utrumque orificium M & N incipit: affundanturque aquæ in A B, ut vas conſtanter plenum ſervetur, ſic autem fiet, ut aquæ in B N aſſurgant (aut etiam deſcendant pro rerum circumſtantiis) quod cum ita ſit, quæremus velocitatem ſuperficiei aqueæ, cum perveniet in ſitum *h l*. Fig. 42.

Hunc in finem exprimemus amplitudinem orificii M per m, orificii N per n & amplitudinem *h l* (quæ quidem ubique eadem ponitur) per g. Deinde ponemus $BM = a$, $HM = b$, $Bb = x$, atque proinde $bM = a - x$. Sic vero patet ex poſitione infinitæ veluti vaſorum A M & B N amplitudinis,

 cum

cum ſuperficies aquæ variabilis eſt in bl, fore altitudinem debitam velocitati aquæ per M transfluentis $= Bb = x$, velocitatemque ipſam $= \sqrt{x}$, ſimilemque altitudinem ratione orificii $N = bM = a - x$, atque velocitatem aquæ per N transfluentis $= \sqrt{a-x}$; eſt igitur quantitas dato tempuſculo per M in vas B N influentis ad quantitatem eodem tempuſculo ex vaſe effluentis ut $m\sqrt{x}$ ad $n\sqrt{a-x}$, harumque quantitatum differentia diviſa per amplitudinem g dat velocitatem ſuperficiei bl, quæ proinde velocitas, quam vocabimus v, exprimetur hâc æquatione,

$$v = \frac{m\sqrt{x} - n\sqrt{a-x}}{g}$$

§. 22. Ut jam innoteſcat tempus, quo ſuperficies fluidi ex H L venit in bl, vocabimus illud tempus t: quia autem eſt $dt = \frac{-dx}{v}$, erit, poſito pro v valore modo invento,

$$dt = \frac{-g\,dx}{m\sqrt{x} - n\sqrt{a-x}}$$

Poteſt quidem hæc formula immediate rationalis fieri ponendo $x = \frac{4aqq}{(1+qq)^2}$, atque deinde debito modo conſtrui: Iſta vero methodus paullo prolixior eſt hâc altera, qua quantitas reducenda dividitur in duo membra ſeorſim integranda, nempe præmiſſa æquatio non differt ab hâc:

$$dt = \frac{mg\,dx\sqrt{x}}{nna - (mm+nn)x} + \frac{ng\,dx\sqrt{a-x}}{nna - (mm+nn)x}:$$

Et autem $\int \frac{mg\,dx\sqrt{x}}{nna-(mm+nn)x} = -\frac{2mg}{mm+nn}\sqrt{x} + \frac{mng\sqrt{a}}{(mm+nn)\sqrt{(mm+nn)}} \times$
$log. \frac{n\sqrt{a} + \sqrt{mm+nn}\sqrt{x}}{n\sqrt{a} - \sqrt{mm+nn}\sqrt{x}}$; alteriusque membri integrale
nempe $\int \frac{ng\,dx\sqrt{a-x}}{nna-(mm+nn)x}$ fit $= \frac{-2ng}{mm+nn}\sqrt{(a-x)} +$
$\frac{mng\sqrt{a}}{(mm+nn)\times\sqrt{(mm+nn)}}\, log. \frac{m\sqrt{a} + \sqrt{mm+nn}\times\sqrt{a-x}}{m\sqrt{a} - \sqrt{mm+nn}\times\sqrt{a-x}}$;

Patet exinde addita debita conſtante fore

$$t = \frac{2mg\sqrt{a-b} - 2mg\sqrt{x} + 2ng\sqrt{b} - 2ng\sqrt{a-x}}{mm+nn} +$$
$$\frac{mng\sqrt{a}}{(mm+nn)\times\sqrt{(mm+nn)}} \times$$

log.

$$\log. \frac{mna+(mm+nn)\times\surd(ax-xx)+m\surd(mm+nn)\surd ax+n\surd(mm+nn)\surd(aa-ax)}{mna+(mm+nn)\times\surd(ax-xx)-m\surd(mm+nn)\surd ax-n\surd(mm+nn)\surd(aa-ax)}$$

$$-\frac{mng\surd a}{(mm+nn)\times\surd(mm+nn)}\times$$

$$\log. \frac{mna+(mm+nn)\times\surd(ab-bb)+m\surd(mm+nn)\surd(aa-ab)+n\surd(mm+nn)\surd ab}{mna+(mm+nn)\times\surd(ab-bb)-m\surd(mm+nn)\surd(aa-ab)-n\surd(mm+nn)\surd ab}.$$

§. 23. Ex paragrapho 19. liquet ſuperficiem $b\,l$ in ſitu ſuo permanere cum eſt B b ($=x$) $=\frac{nna}{mm+nn}$. At vero ſi in æquatione integrata præcedentis paragraphi ponitur $x=\frac{nna}{mm+nn}$, fit denominator in quantitate logarithmicali $=o$, ipſaque proinde quantitas infinita: tempus igitur totius motus infinities majus eſt, quam cujuscunque partis.

Sed ut alium inſuper caſum determinemus, videbimus quanto tempore ſuperficies aquæ ex infimo ſitu M N (poſito nempe $b=o$) aſcendat quantitate $\frac{1}{2}a$, poſito $m:n=4:3$. fit autem

$$t=\frac{8g\surd a-14g\surd\frac{1}{2}a}{25}+\frac{12g\surd a}{125}\log.\left(\frac{49+35\surd 2}{49-35\surd 2}\right)-\frac{12g\surd a}{125}\log.-4, \text{ ſeu}$$

$$t=\frac{8g\surd a-7g\surd 2a}{25}+\frac{12g\surd a}{125}\log.\left(\frac{49+35\surd 2}{140\surd 2-196}\right),$$

id eſt, proxime $t=\frac{15g}{100}\times 2\surd a$, quod indicat, eſſe tempus iſtud ad tempus quo grave libere cadit per altitudinem B M proxime ut $15g$ ad 100: Pariter tempus deſcenſus invenitur, ſi ab initio ſuperficies bl fuerit ultra ſitum æquilibrii poſita. Fuerit v. gr. utrumque vas aquis totum repletum, orificia autem M & N rationem nunc habeant quæ eſt inter 3 & 4, ſitque tempus determinandum, quo ſuperficies ex B deſcendat per dimidiam B M: hypotheſes hæ faciunt $m=3$; $n=4$; $b=a$, atque $x=\frac{1}{2}a$, ita vero fit

$$t=\frac{8g\surd a-7g\surd 2a}{25}+\frac{12g\surd a}{125}\log.\left(\frac{49+35\surd 2}{49-35\surd 2}\right)-\frac{12g\surd a}{125}\log.-4. \text{ Ex}$$

quo apparet in utroque exemplo idem eſſe tempus.

§. 24. Priusquam deſcendamus ad vaſa multifida indagaſſe conveniet, quænam aquæ quantitas per utrumque orificium M & N fluat, dum ſuperficies aquæ ex ſitu H L venit in $b\,l$. Et primo quidem, quod ad orificium M

pertinet, perſpicuum eſt quantitatem aquæ dato tempuſculo (dt) per illud transfluentem proportionalem eſſe velocitati ($\sqrt{x}$) ductæ in magnitudinem orificii (m) ipſumque tempuſculum dt, ita ut hæc quantitas ſit

$$\left(\text{ob } dt = \frac{-g\,dx}{m\sqrt{x}-n\sqrt{a-x}} \text{ per §. 22.}\right) = \frac{-mg\,dx\sqrt{x}}{m\sqrt{x}-n\sqrt{a-x}},$$

atque proinde omnis quantitas quæ ab initio effluxerit

$$= -\int \frac{mg\,dx\sqrt{x}}{m\sqrt{x}-n\sqrt{a-x}}. \text{ Eſt autem } -\int \frac{mg\,dx\sqrt{x}}{m\sqrt{x}-n\sqrt{a-x}} =$$

$$\frac{mnga}{(m+n)^2}\log.\left(\frac{ma-mb-nb}{mx+nx-na}\right) + \frac{mg}{m+n} \times (a-b-x).$$

Eodem modo eruitur quantitas aquæ interea per orificium N effluentis (quæ ſcilicet eſt $= -\int \frac{ng\,dx\sqrt{a-x}}{m\sqrt{x}-n\sqrt{a-x}}$) =

$$\frac{mnga}{(m+n)^2}\log.\left(\frac{ma-mb-nb}{mx+nx-na}\right) - \frac{ng}{m+n} \times (a-b-x).$$

Atque inde etiam innoteſcit quantitas aquæ, quæ in AB affunditur, neque enim differt ab illa, quæ per M transfluit: aqua denique in vaſe BN collecta exprimitur per $g\,(a-b-x,)$ & cum differentia ſumitur aquarum per M & N transfluentium, oritur eadem iſta quantitas $g\,(a-b-x)$.

§. 25. Prouti §. 21. velocitatem ſuperficiei locum continue mutantis determinavimus pro vaſe bifido, ita nunc in vaſis multifidis velocitates ſingularum ſuperficierum definiemus. Fuerit nempe altitudo ſuperficiei ſupremæ ſupra proximam $= x$, altitudo hujus ſupra ſequentem $= y$, deinde $= z$, rurſuſque altitudo proxima $= s$, & ſic porro. Amplitudines vero orificiorum deſignentur per m, n, p, q. &c. amplitudines vaſis ſecundi, tertii, quarti &c. ſint M, N, P. &c. Sic patet fore velocitatem ſuperficiei ſecundæ $= \frac{m\sqrt{x}-n\sqrt{y}}{M}$; veloc. ſuperf. tert. $= \frac{n\sqrt{y}-p\sqrt{z}}{N}$; velocit. ſuperfic. quartæ $= \frac{p\sqrt{z}-q\sqrt{s}}{P}$ &c.

Porro cum ſpatiola iiſdem tempuſculis à ſuperficiebus percurſa ſint ut velocitates, apparet ſic ſingulis momentis determinari ſitus iſtarum ſuperficierum, quamvis æquationes ſint intractabiles fere. Id ex ſe patet, ſi vel unica

ca ſuperficies extra ſitum æquilibrii, ſupra §. 19. definiti poſita fuerit, fore ut omnes reliquæ motibus reciprocis agitentur, donec poſt tempus infinitum in priſtinum ſitum redierint ſimul.

§. 26. Sit porro vas ita formatum, ut oſtendit Fig. 43. diviſum ſcilicet in duas partes ABEG & LQNE inter ſe, mediante foramine M communicantes; ſintque præterea foramina H & N per quæ aquæ exiliant, dum in AB totidem affunduntur. Sint autem amplitudines in utroque vaſe veluti infinite amplæ ratione foraminum M, H & N; Hiſque poſitis propoſitum ſit velocitates invenire, quibus aquæ tam per H, quam per N ejiciantur ſeu altitudines iſtis velocitatibus debitas. Erunt autem velocitates invariabiles, quia vas aquis plenum conſervatur, ſimulque vaſis amplitudines reſpectu foraminum infinitæ cenſentur. Fig. 43.

Solutio iſtius problematis ex præcedentibus facile colligetur, ſi modo concipiatur foramen M in duas diviſum partes o & p, quarum altera o aquas foramini H, altera p foramini N mittat: partes autem o & p (quia per utramque eadem fluunt velocitate aquæ) eam habebunt rationem, quam inter ſe habent quantitates aquarum eodem tempore per H & N effluentium, id eſt, rationem compoſitam ex ratione amplitudinis H ad amplitudinem N & velocitatis in H ad velocitatem in N. Quibus præmonitis perſpicuum eſt, ſi amplitudines foraminum M, H & N indicentur per α, β, γ, altitudines autem velocitatibus in H & N debitæ deſignentur per x & y, ipſæque proinde velocitates per $\sqrt{x}$ & $\sqrt{y}$ fore amplitudinem $o = \frac{\beta\sqrt{x}}{\beta\sqrt{x}+\gamma\sqrt{y}}\,\alpha$ & amplitudinem $p = \frac{\gamma\sqrt{y}}{\beta\sqrt{x}+\gamma\sqrt{y}}\,\alpha$.

Ponatur nunc altitudo ſuperficiei AB ſupra orificium H $= a$, & habebitur x, ut demonſtratum fuit §. 4. ſi quadratum foraminis o dividatur per ſummam quadratorum foraminum o & H & quod oritur multiplicetur per a; ſic igitur fit $x = \frac{\alpha\alpha a x}{\alpha\alpha x+(\beta\sqrt{x}+\gamma\sqrt{y})^2}$, ex quo oritur hæc æquatio

$$(A)\quad \alpha\alpha x+(\beta\sqrt{x}+\gamma\sqrt{y})^2=\alpha\alpha a.$$

Eodem modo ratione foraminum p & N, poſita altitudine AB ſupra N $= a+b$, obtinetur hæc altera æquatio:

 (B)

$$(B)\ \alpha\alpha y + (\beta\sqrt{x} + \gamma\sqrt{y})^2 = \alpha\alpha \times (a+b).$$

Subtractâ æquatione (B) ab æquatione (A) prodit $y = x + b$, ex quo ſequitur, ſi venæ ambæ verticaliter ſurſum dirigantur, utramque ad eundem locum aſſilire. Deinde ſi in æquatione (A) ſubſtituatur pro y valor ejus $x+b$, erit

$$(C)\ \alpha\alpha x + (\beta\sqrt{x} + \gamma\sqrt{\overline{x+b}})^2 = \alpha\alpha a,$$

unde deducitur valor ipſius x æquatione quadrata.

§. 27. Ex præcedentis paragraphi æquationibus ſequentes fluunt affectiones.

I. Quia velocitas aquæ per M transfluentis eſt $= \frac{\beta\sqrt{x}+\gamma\sqrt{y}}{\alpha}$, erit altitudo generans hanc velocitatem $= \left(\frac{\beta\sqrt{x}+\gamma\sqrt{y}}{\alpha}\right)^2$; ſed ſi addantur æquationes (A) & (B) fit:

$$\left(\frac{\beta\sqrt{x}+\gamma\sqrt{y}}{\alpha}\right)^2 = \frac{2a+b-x-y}{2} = \text{ob } (y = x+b)\ a-x.$$

II. Si foramen H ſit valde exiguum ratione foraminum M & N, id eſt, ſi β poſſit cenſeri nulla ratione α & γ, abit æquatio (C) in hanc

$$\alpha\alpha x + \gamma\gamma x + \gamma\gamma b = \alpha\alpha a, \text{ ſeu}$$

$$x = \frac{\alpha\alpha a - \gamma\gamma b}{\alpha\alpha+\gamma\gamma};$$

Id vero egregie convenit cum paragrapho decimo nono, cum manifeſtum ſit aquam per foramen valde exiguum ad eandem altitudinem aſſilire, quam haberet aqua, ſi hæc laminam LQ tantum deorſum premat, quantum ab aqua interna ſurſum premitur; Iſta vero præfata altitudo vi paragraphi 19. eſt $\frac{\alpha\alpha a-\gamma\gamma b}{\alpha\alpha+\gamma\gamma}$; Eſt porro in iſta hypotheſi altitudo velocitatis aquarum in N ſeu

$$x+b = \frac{\alpha\alpha a + \alpha\alpha b}{\alpha\alpha+\gamma\gamma}$$

& denique altitudo velocitatis aquarum in M, ſeu

$$a - x = \frac{\gamma\gamma a+\gamma\gamma b}{\alpha\alpha+\gamma\gamma};$$

quæ poſteriores æquationes in iſto caſu particulari pariter ex §. 19. immediatè colligi aut prævideri potuiſſent.

III.

III. Si vero nunc alterum foramen N admodum exiguum præ ambobus reliquis ponatur, erit facto $\gamma = o$

$$x = \frac{\alpha\alpha a}{\alpha\alpha + \beta\beta}; \text{ deinde}$$

$$x + b = \frac{\alpha\alpha a + \alpha\alpha b + \beta\beta b}{\alpha\alpha + \beta\beta}, \ \&$$

$$a - x = \frac{\beta\beta a}{\alpha\alpha + \beta\beta}.$$

IV. Si $\gamma\gamma b = \alpha\alpha a$, fit $x = o$. Nullam igitur in hoc caſu preſſionem ſuſtinent partes laminæ L Q: imo inferiora verſus premitur, ſi γ ſit majus quam $\frac{\alpha\alpha a}{b}$, & lamina nullibi ſit perforata.

Iſta vero omnia ſimiliter ex §. 19. facile colliguntur.

V. Ita quoque ope ejusdem paragraphi ſine calculo novo prævideri potuiſſet, quid fieri debeat, cum poſitis foraminibus H & N in eadem altitudine ſumma foraminum eorum, ceu unicum amplitudinis $\beta + \gamma$ conſiderari poteſt: Indicant nempe tam §. 19. quam §. 26. eſſe

$$x = \frac{\alpha\alpha a}{\alpha\alpha + (\beta + \gamma)^2},$$

VI. Notari etiam poteſt, cum valor ipſius x ſit imaginarius, id provenire ex eo, quod aquæ non ſolum non effluant, in aliquibus caſibus per H, ſed quod ſuperficies L Q etiam deſcendat; unde fieri poteſt, ut infra orificium M deſcendat, quo ipſo ceſſat aquarum contiguitas contra hypotheſin propoſitionis. Si autem valor x eſt realis, tum dupliciter exprimitur, ſed alter valor inutilis eſt reputandus; ſic igitur cavendum ne præpoſtera radix ceu utilis aſſumatur.

VII. Denique ut caſum ſpecialiſſimum attingamus, ponemus omnia foramina inter ſe æqualia, & prodibit $5xx + (2b - 6a)x = -aa + 2ab - bb$, ſeu $x = \frac{3a - b - 2\sqrt{(aa + ab - bb)}}{5}$; atque ſi fuerit præterea $a = 3b$, erit $x =$ (proxime) $\frac{4}{15}b$, deinde altitudo velocitatis in foramine N ſeu $x + b = \frac{19}{15}b$ atque altitudo velocitati in M debita ſeu $a - x = \frac{41}{15}b$. Sunt itaque velocitates ſeu etiam, quia foramina æqualia ſunt, quantitates aqua-

aquarum iisdem temporibus per foramina M, H & N transfluentium proxime ut $\sqrt{41.2.}$ & $\sqrt{19}$.

§. 28. Ex his omnibus patet methodus determinandi motum in fluidis tum etiam, cum quantitas *virium vivarum* non conſervatur; & ſimili modo ſemper abſolvetur computus, quoties ex natura ſubjectæ quæſtionis præſumi poteſt (uti in quæſtionibus hujus ſectionis accurate potuit) quantum *vis vivæ* ſingulis momentis inutilis ad motum determinandum evaneſcat. Neque enim ſoli ſunt caſus, quos adhuc examinavimus: lubet itaque alium addere, qui oſcillationes fluidorum ſpectat, ut innoteſcat quantum inde decrementum excurſiones fluidi capiant.

Fig. 44. Sint duo tubi amplitudine æquales & cylindrici AL & BH (Fig. 44.) verticaliter inſerti vaſi ampliſſimo horizontali ABOP. Sit vas iſtud totum aqua repletum: tubi autem aquam habeant usque in C & F; deinde ſublato æquilibrio hæreat altera ſuperficies in G altera in E; moxque aqua ſibi relicta moveri incipiat. His poſitis tantum deberet ſuperficies G deſcendere infra locum C, alteraque ſuperficies E aſcendere ſupra F, quanta eſt altitudo GC ſeu EF ſi omnis *vis viva* conſervaretur (ab impedimentis frictionum aliisque ſimilibus nunc animum abſtrahimus): Verum patet, *vim vivam* omnis aquæ per A in vas horizontale fluentis abſumi ſine alio effectu ab aqua ibidem ſtagnante, indeque ſequitur deſcenſum ſuperficiei G alteriusque aſcenſum minorem fore, quam modo dictum fuit: id igitur decrementum nunc explorabimus.

Ponatur ad hunc finem ſuperficiem ex G perveniſſe in M, ponaturque $GM = x$, $GC = b$, $CA = a$: erit $BE = a - b$, $EN = x$; $MC = FN = b - x$; Deinde fiat altitudo debita velocitati ſuperficiei in $M = v$, in ſitu proximo $m = v + dv$; eritque incrementum *vis vivæ* aquæ (dum ſuperficies percurrunt elementa Mm, Nn, ſeu dx) $= 2adv$, cui addenda eſt *vis viva* guttulæ, quæ ab aqua vaſis horizontalis abſumitur, nempe vdx, & erit ſumma $2adv + vdx$ æqualis *deſcenſui actuali* aquæ multiplicato per maſſam aquæ, quod productum eſt æquale *deſcenſui actuali* guttulæ dx, multiplicato per $2b - 2x$. Eſt igitur

$$2adv + vdx = 2bdx - 2xdx.$$

Hæc vero æquatio recte integrata abit in hanc

$v =$

$$v = 4a + 2b - 2x - c^{\frac{-x}{2a}} \times (2b + 4a)$$

unde ſi ponatur $4a + 2b - 2x - c^{\frac{-x}{2a}} \times (2b + 4a) = 0$, dabit valor ipſius x totam excurſionem, à qua ſi auferatur b, reſiduum indicabit deſcenſum infra punctum æquilibrii C.

§. 29. Ut vero exemplo quodam appareat, quantum hâc ratione oſcillationes diminuantur, ponemus $a = b$, facta ſcilicet CA = GC & BE = o. Ita oritur

$$3a - x = c^{\frac{-x}{2a}} \times (3a) \text{ ſive}$$

$$c^{\frac{x}{2a}} = \frac{3a}{3a-x} \text{ vel } x = 2a \log. \frac{3a}{3a-x},$$

cui æquationi prope admodum ſatisfacit valor $x = \frac{7}{4}a$. Eſt igitur decrementum excurſionis ſeu $a - b$ = quartæ parti elevationis fluidi ſupra punctum medium: ſi majus obſervetur experimento, reliquum adhæſioni aquæ ad latera tuborum tribuendum erit.

§. 30. Neque iſta diminutarum excurſionum ratio plane, ut ſuſpicor, auferetur, ſi vel æqualis fiat amplitudinis tubus horizontalis cum verticalibus, ob mutatam fluidi directionem in punctis A & B.

Cæterum infiniti alii fingi poſſent caſus iiſdem principiis ſolvendi, veluti ſi natura oſcillationum indaganda ſit in vaſe Fig. 44. cum id in parte horizontali diaphragmate in duas diſpeſcitur partes ſolo lumine, quod diaphragma habeat, inter ſe communicantes & hujuſmodi alii. Puto autem hæc jam ſufficere, ut quiſque ſibi facile regulas generales pro iſtiuſmodi quæſtionibus ſolvendis formare poſſit.

EXPERIMENTA

Ad ſectionem octavam pertinentia.

Experimentum I.

PAragraphum quartum, quo dicitur altitudinem velocitati aquæ per orificium D effluentis (Fig. 37.) eſſe $\frac{mmx}{nn+mm}$ eo confirmavi modo, ut

utrumque orificium G & D limbum haberet inſtar Zonulæ paullulum elevatum, ne contractioni venarum locus eſſet, tutumque fieri poſſet judicium à quantitate aquæ dato tempore effluentis ad velocitates. Deinde ſumtis accuratè menſuris, obſervatoque tempore quo ſuperficies per datum ſpatium A P deſcenderet, vidi tempus iſtud recte reſpondere velocitatibus dicto paragrapho definitis: obſervavi etiam nihilo mutari motum ab elevatione aut depreſſione diaphragmatis. Reliqua ad experimentum pertinentia memoria exciderunt, neque ea in chartam conjeci: ſuperfluum autem duxi experimentum repetere, quod unicuique facile erit imitari: fundamentum autem id eſt reliquis, quæ adeoque ulteriori diſquiſitione experimentali vix opus habent: volui tamen ſequentia præterea tentare.

Experimentum 2.

Vaſe uſus ſum, quale fere adhibuit Mariottus (*vid.* fig. 38.) rurſusque confirmavi æquationem noſtram hunc in modum: feci ut aquæ per orificium D horizontaliter effluerent, tuncque menſuras cepi altitudinis orificii D ſupra pavimentum & diſtantiam loci, ubi vena in pavimentum incidebat à puncto in eodem pavimento, cui orificium D verticaliter imminebat; Inde cognovi altitudinem velocitati aquæ in D effluentis debitam: eandem autem hanc altitudinem experimento proxime inveneram, quam theoria hujus ſectionis indicat §. IV. Similia experimenta apponam in fine experimentorum ad ſectionem duodecimam pertinentium, quæ ſimul theoriam noſtram *hydraulico-ſtaticam* confirmabunt.

Denique cum multa ſint in §. §. 26. & 27. quæ ſingulari calculo eruta fuerunt, operæ pretium erit de illis quoque experimenta ſumere, præſertim cum alia ſimul eadem opera ſumi poterunt experimenta, quæ in *ſect.* XII. recenſebuntur, ſi vas, quale Fig. 43. ſiſtit, ad hunc finem fieri curetur.

Cæterum hæc theoria etiam confirmatur experimentis in *Sectione Septima* recenſitis, quæ de oſcillationibus fluidorum in tubos per foramina influentium ſumſi.

HYDRO-

HYDRODYNAMICÆ
SECTIO NONA.
De motu fluidorum, quæ non proprio pondere, ſed potentia aliena ejiciuntur, ubi præſertim de Machinis Hydraulicis earundemque ultimo qui dari poteſt perfectionis gradu, & quomodo mechanica tam ſolidorum quam fluidorum ulterius perfici poſſit.

§. I.

IN hâc ſectione, qua Machinas examinare hydraulicas, uſumque earum, quantum fieri poteſt, perficere potiſſimum conſtitui, animum abſtrahemus à variationibus motus, quæ originem ducunt à potentia vel inertia fluidi interni, quia ut vidimus motus aquæ internæ tantum non æquabilis eſt à primo fere fluxus initio, ſi orificium exile ſit, uti eſt in Machinis hydraulicis plerisque ratione amplitudinum internarum. Res enim foret ridicula in rebus practicis ſollicitos eſſe de mutationibus, quæ primis fluxus momentis fiunt, quasque jam determinavimus in ſectione quarta, quod ibi operæ pretium eſſe poterat ut omnis theoriæ vis inde eluceſceret. Igitur durante toto motu, brevitatis gratiâ, ponemus aquam conſtanter velocitate expelli, quæ ſe habeat ut radix potentiæ internæ prementis, poſtquam hæc potentia ad pondus cylindri aquei foramini ſuperincumbentis reducta fuerit: nam quæcunque fuerit iſta potentia, conſiderandum erit pondus cylindri verticalis aquei ſuperficiei aqueæ internæ ſuperincumbentis, atque altitudo iſtius cylindri dabit altitudinem velocitati aquæ exilientis debitam, ſi modo nulla adſint obſtacula extrinſeca, & aqua ex vaſe ampliſſimo ejiciatur. Hoc ita intelligendum eſt, ut ſi operculum A B pondere P oneratum (Fig. 45.) aquam per orificium F expellat, pondus autem P æquale ſit ponderi cylindri aquei H A B I, tunc vena aquea F G altitudinem H I attingere debeat. Fig. 45.

Definitiones.

§. 2. Per *potentiam moventem* deinceps intelligam principium illud agens, quod conſiſtit in pondere, preſſione animata aliisve hujuscemodi viribus, uti dicuntur, mortuis.

Productum autem quod oritur à multiplicatione *potentiæ* iſtius *moventis* per ejusdem velocitatem æque ac tempus durante quo preſſionem ſuam exerit, deſignabo per *potentiam abſolutam*. Vel quia productum ex velocitate & tempore proportionale eſt ſimpliciter ſpatio percurſo, licebit etiam *potentiam abſolutam* colligere ex *potentia movente* multiplicata per ſpatium, quod eadem percurrit. Id vero productum ideo voco *potentiam abſolutam*, quia ex illo demum æſtimandi ſunt labores hominum operariorum in elevandis aquis exantlati, quod mox demonſtratum dabo in regulis, quæ mihi in hanc rem obſervatæ fuerunt. Interim viſæ mihi fuerunt machinæ hydraulicæ commode ſe reduci pati ad duo genera, quorum alterum aquas cum impetu ejicit, alterum de loco in locum placide veluti transportat. Utrumque ordine ſuo pertractabo genus & denique ſub finem quædam addam de diverſis potentiis moventibus.

(A) *De machinis aquas cum impetu in altum projicientibus.*

Regula 1.

§. 3. Labores hominum operariorum, qui machinis hydraulicis pro aquis elevandis apponuntur, æſtimandi ſunt ex *potentia abſoluta*, id eſt, ex *potentia movente* ſeu preſſione quam exerunt, ex tempore & ex velocitate puncti, cui *potentia movens* applicatur.

Demonſtratio.

(*α*) De *potentia movente* res eſt perſpicua: labores enim cæteris omnibus paribus ſunt utique proportionales numero operariorum ſeu *potentiæ moventi*. (*β*) Ratione temporis res eſt non minus manifeſta ex omnium circumſtantiarum replicatione, quæ ex duplicatione temporis oritur. (*γ*) Denique quod ad velocitatem attinet res ex eo eſt deducenda, quod ſive *potentiam moventem* duplices, ſive ejus velocitatem non diverſus oriatur effectus,

nem-

nempe duplus ab utraque parte. Finge pondus P deſcenſu ſuo aquam per orificium F ejicere ad altitudinem F G : deinde manentibus reliquis duplicatum puta orificium F, & vides ad eandem altitudinem F G eodemque tempore duplam aquæ quantitatem ejectum iri ab eadem *potentia movente* P, ſed ea duplo celerius deſcendente. Pariter quantitas aquæ manentibus reliquis duplicabitur, ſi & orificium F & amplitudinem A B & pondus ſeu *potent. movent.* P duplices, tunc vero velocitas hujus potentiæ duplicatæ invariata manet. Igitur utroque modo effectus geminatur. Q. E. D.

Scholium.

§. 4. Propoſitio præcedens non ſenſu phyſiologico ſed morali eſt interpretanda: moraliter neque plus neque minus æſtimo laborem hominis, qui eadem celeritate conatum duplum exercet, quam ejus qui eodem conatu celeritatem duplicat, quia nempe uterque eundem edit effectum, fieri tamen poteſt, ut alterius labor, quamvis altero non minus robuſti, ſenſu phyſiologico ſit admodum major. Si quis conatu 20. librarum ſingulis minutis primis ſpatium 200. *ped.* faciat, is facile conatum geminabit, difficillime vero velocitatem. Ex hoc conſequens eſt in omni machinarum genere diſpiciendum præſertim eſſe, quomodo debeant eſſe conſtitutæ, ut pro eodem tempore minima hominum defatigatione productum ex conatu eorum in velocitatem omnium maximum ſit: atque exinde patebit, quænam in ergatis longitudo vectibus ſit tribuenda, quantus in rotis ſeu tympanis calcatoriis radius ſit faciendus, quanta remis longitudo ſit concilianda, & ſic de aliis machinis.

Ratione uſus autem tympanorum calcatoriorum, quæ frequentiſſime adhibentur ut momentum noſtræ animadverſionis eo magis fiat perſpicuum, hoc experimentum intelligatur:

Ponamus in Fig. 46. altitudinem verticalem multorum milliarum, ad quam homo dato tempore aſcendere debeat: tempus autem ſumemus decem horarum, quia talis laboribus diurnis terminus eſſe ſolet, dein fingamus plures vias, A C, A D &c. diverſe ad horizontalem B D inclinatas: His poſitis intelligimus eò celerius viatori progrediendum eſſe, quo viam ſelegerit minus inclinatam, ut eodem tempore culmen montis A attingat, & patet viam aliquam fore veluti A C, ſuper quâ minima defatigatione iter abſolvet, quan- Fig. 46.

 do-

doquidem nemo nec ſuper plano verticali incedere nec dato tempore viam infinitam abſolvere poteſt; Statuamus viam hanc minimæ defatigationis cum horizontali angulum facere A C B 30. *graduum*.

Quod ſi ita ſit, erit tympanum calcatorium ita fabricandum, ut pondus deſiderata velocitate ſuperetur, cum calcator perpetuo triginta *gradibus* à puncto tympani infimo diſtat.

Ex eodem principio etiam inter machinas diverſi generis ſelectus eſt faciendus: ita v. gr. ſi in ergatis vectiarius potentiam exerat, ſeu preſſionem horizontalem, quæ efficiat quartam ſui proprii ponderis partem, hocque niſu ſingulis minutis primis ſpatium 200. *ped.* abſolvat, is fere ut puto eodem defatigabitur modo, ac ſi eadem velocitate tympanum rotatorium ad angulum 30. *grad.* calcet; interim tamen pondus duplum eodem tempore ad eandem altitudinem hoc modo feret calcator, quia cæteris paribus preſſionem duplam exerit.

Regula 2.

§. 5. Exiſtente eadem *potentia abſoluta* dico omnes machinas, quæ nullas patiuntur frictiones & quæ nullos motus ad propoſitum finem inutiles generant, eundem effectum præſtare neque adeo unam alteri præferendam eſſe.

Demonſtratio.

Ex mechanicis conſtat machinam utcunque compoſitam rèduci poſſe ad vectem ſimplicem: igitur omnem machinationem hydraulicam repræſentare licebit ſimplici antlia vecte inſtructa Fig. 47. ubi nempe embolus ope vectis M N mobilis circa punctum M detruditur, atque ſic aqua per orificium F expellitur. At vero ſi potentia movens P vecti applicata intelligatur in N, videmus ex præcedente propoſitione nihil lucri accedere *potentiæ abſolutæ* ab aucta vel diminuta longitudine vectis M N: & certe quæcunque ſit iſta longitudo fieri poteſt, ut *potentia movens* eadem atque invariata velocitate mota eandem aquæ quantitatem eodem impetu expellat, ſi modo amplitudo antliæ A B rationem habeat conſtantem ad longitudinem vectis M N. Ex quibus perſpicuum eſt, omnes machinas eadem *potentia abſoluta* eundem effectum præſtare, ſi modo à frictionibus motibuſque ad deſtinatum finem inutilibus animus abſtrahatur.

Scholium.

Scholium.

§. 6. Non deſunt qui putent machinam excogitari poſſe, cujus ope minimo labore maxima aquæ quantitas ad quamcunque altitudinem elevari poſſit, animumque excrucient, in anquirendis rotis, vectibus, ponderibus appendendis: ſed operam perdunt, neque audiendi ſunt hujuſmodi promiſſores, cum magni quid ſibi videntur inveniſſe: Optima machina eſt, ſi ſolum ejus effectum reſpiciamus, quæ minimas patitur frictiones, nullosque generat motus inutiles, de quo utroque evitando præcepta trademus infrà,

Regula 3.

§. 7. In antliis, quales Figuris 45. & 47. repræſentantur, in quibus ſuperficies aquæ interna AB in eadem propemodum altitudine eſt cum foramine F, ſunt *potentiæ abſolutæ* pro iiſdem temporibus in triplicata ratione velocitatum aquarum exilientium.

Demonſtratio.

Sunt enim *potentiæ moventes* in duplicata ratione velocitatum, quibus aquæ per foramen F erumpunt & velocitates *potentiarum moventium* ſequuntur ipſam rationem velocitatum aquarum exilientium: Sed pro iiſdem temporibus ſunt *potentiæ abſolutæ* ut potentiæ moventes multiplicatæ per ſuas velocitates, ergo patet propoſitio.

Scholium.

§. 8. Sequitur ex iſta regula, ſi animus ſit aquam per foramen F ad altitudinem FG elevare, magnam *potentiæ abſolutæ* partem ſine fructu perdi, cum aquæ majori impetu erumpunt, quam quæ altitudini FG reſpondeat; fac enim aquas dupla velocitate expelli, requiretur *potentia abſoluta* octupla, neque tamen ratione finis propoſiti effectus plus quam duplus eſt cenſendus, quia nempe eodem tempore dupla aquarum quantitas elevatur: potuiſſetque iſte effectus obtineri *potentia abſoluta* ſubquadrupla exprimendo aquas ſimplici velocitate per foramen duplum; Hoc igitur nomine tres quartæ partes iſtius potentiæ inutiliter impenſæ dicendæ ſunt. Originem hujus detrimenti indicavi §. 5. eaque conſiſtit in motu qui generatur ad propoſitum finem inutili: nempe

pe omnis motus qui aquis reſiduus eſt poſtquam altitudinem G attigerunt in noſtro caſu ſuperfluus eſt dicendus.

Regula 4.

Fig. 48. §. 9. Cum aquæ expelluntur per canalem D F (Fig. 48.) habentque in orificio F velocitatem quæ debeatur altitudini verticali G F, eſt *potentia abſoluta* eodem tempore impenſa proportionalis velocitati aquæ in F ductæ in altitudinem G ſupra A B.

Demonſtratio.

Eſt enim potentia movens P proportionalis præfatæ altitudini & velocitas iſtius potentiæ eſt ut velocitas aquæ in F.

Scholium.

§. 10. *Potentiæ abſolutæ* majori ratione creſcunt quam velocitates aquarum effluentium, id eſt, quam quantitates eodem tempore ejectæ: attamen differentia rationum fere inſenſibilis eſt, cum altitudo F G parva admodum eſt ratione altitudinis canalis F D: Sit ex. gr. F G æqualis $\frac{1}{4}$ F D (negligendo altitudinem B D) mox vero ejiciantur aquæ velocitate dupla, ita, ut nunc ſit F D = F G; ſic erunt *potentiæ abſolutæ* ut $1 \times \frac{5}{4}$ ad 2×2 ſeu ut 5 ad 16 ſicut ad ejiciendam duplam aquæ quantitatem *potentia abſoluta* requiratur pluſquam tripla: Si vero F G ſtatuatur prius $= \frac{1}{100}$ F D, & deinde aquæ rurſus dupla velocitate exprimi ponantur, erunt nunc *potentiæ abſolutæ* ut 1×101 ad 2×204 ſeu ut 101 ad 208, quæ ratio à ſubdupla parum deficit. Sequitur inde, quo minori velocitate aquæ hauriantur, eo majori cum fructu *potentiam abſolutam* impendi, & tunc demum eam propemodum omnem utiliter impendi, cum fere inſenſibili velocitate aquæ per orificium F effluunt: poterit autem magnitudo orificii compenſare velocitatis exiguitatem, ut dato tempore notabilis aquarum quantitas hauriri poſſit. Diſpendium *potentiæ abſolutæ* ſic definietur.

Regula 5.

§. 11. Conſtitutum fuerit ope antliæ A B D F, valvula in fundo inſtructæ & aquæ impoſitæ, aquas ex loco humiliori A D in altiorem F transfundere, fueritque velocitas media aquæ in F effluentis debita altitudini F G, erit

erit diſpendium *potentiæ abſolutæ* ad integram hanc potentiam ut F G ad altitudinem G ſupra A B.

Demonſtratio.

Fingamus augeri admodum orificium F diminuta in eadem ratione velocitate aquarum effluentium in F; ſic non mutabitur quantitas aquæ dato tempore effluentis, ſi velocitas *potentiæ moventis* eadem ſit, atque proinde idem erit effectus. Sed ſi velocitas ita diminuatur, ut altitudo ipſi debita ſit inſenſibilis, exprimetur *potentia movens* per altitudinem F ſupra A B, cum antea *potentia movens* erat æqualis altitudini G ſupra A B; & cum in utroque caſu eadem ſit velocitas *potentiæ moventis*, erunt *potentiæ abſolutæ* pro iiſdem temporibus ut altitudo G ad altitudinem F ſupra communem A B. Igitur differentia altitudinum G & F exprimet diſpendium, cum integra altitudo G ſupra A B repræſentat totam *potentiam abſolutam*.

§. 12. Idem ratiocinium valet pro omni machinationum genere: Quoties nempe aquæ in locum, ad quem elevandæ ſunt, evectæ notabilem habent velocitatem, magnum ſit *potentiæ abſolutæ* diſpendium: poſita enim altitudine elevationis $=$ A; altitudine debita velocitati aquarum in loco quo effunduntur $=$ B, integra potentia abſoluta $=$ P, perdetur $\frac{B}{A+B} \times P$.

Notari etiam poteſt, cum aquæ trans altitudinem aliquam, cujus culmen in F poſitum ſit, fundi debent ope antliæ tubo inſtructæ, continuandum eſſe tubum D F inferiora verſus quantum id liceat, nec abrumpendum in F, prouti id apparet ex Fig. 49. Nam ſi v. gr. punctum F duplo altius poſitum ſit, quam extremitas tubi G, duplo major *potentia abſoluta* requiritur pro transfundendis aquis per canalem abruptum in F, quam per continuatum uſque in G; Fig. 49.
ſi parvula utrobique velocitate effluant, cujus nempe altitudo genitrix parva ſit ratione altitudinum F D vel G D.

Regula 6.

§. 13. Cum in antliis quas hucusque conſideravimus opercula A B ſeu potius emboli non bene lateribus machinarum reſpondent, hiatus relinquitur, & ab hoc aliud diſpendii genus in potentiis abſolutis oritur, quod in antliis, in quibus altitudo orificii ſuprà embolum negligi poteſt,

ſic determinatur. Ut aggregatum ex foramine effluxus & prædicto hiatu, ad eundem hiatum, ita *potentia abſoluta*, quæ impenditur, ad partem illius quæ inutilis eſt, ſeu ad ejusdem diſpendium.

Demonſtratio.

Nam aquæ per foramen & hiatum æqualiter premuntur, & æquali velocitate fluunt; perditur autem omnis *potentia abſoluta*, quæ aquas per hiatum cogit, & hæc ſe habet ad integram *potentiam abſolutam*, ut hiatus ad ſummam foraminis & hiatus.

Scholium.

§. 14. Convenit utique embolis uti bene formatis & politis; neceſſe quoque eſt ut cavitas antliæ ſit plane cylindrica, ejusdemque latera pariter perpolita. Vix autem crediderim, niſi id fiat alio fine, è re eſſe, ut emboli cavitates ultima accuratione expleant, quia fortaſſe ſic majus oritur virium diſpendium à frictionibus, quam ſi circumcirca parvulus relictus fuiſſet hiatus: Si enim hiatus ille centeſimam v. gr. partem foraminis effluxus efficiat, vix amplius locus erit frictionibus & non niſi centeſima præterpropter *potentiæ abſolutæ* pars inde perditur, & fortaſſe à frictione emboli cavitatem antliæ exacte occupantis majus diſpendium oritur. Igitur hoc reſpectu non eſt quod nimis ſollicite evitemus tranſitum aquæ per hiatum ab embolo relictum. Non reſpicit autem hæc animadverſio illas machinas, in quibus emboli retractione aquæ in antliam attrahendæ ſunt. Hic enim juſta & plena emboli magnitudo omnino eſt neceſſaria.

Regula 7.

§. 15. In machinis quæ plura habent foramina aquas transmittentia ex una cavitate in alteram, aliquid de *potentia abſoluta* perditur, cujus rei rationem in præcedente ſectione eſſe diximus, quod ſingularum guttularum ex una cavitate in alteram per foramen commune fluentium *aſcenſus potentialis* perit.

Quo plura ſunt & quo minora hujusmodi foramina, eo majus oritur *potentiæ abſolutæ* diſpendium, quod magni momenti eſſe ſolet, idque fortaſſe præter communem opinionem, in machinis, quas Vitruvius ab inventore vocat,

vocat, Cteſibianis. Loquor autem de foraminibus ita diſpoſitis, ut omnis aqua effluxura per illa tranſire debeat. Iſtud jam detrimenti genus tali definietur calculo.

Sit amplitudo foraminis ultimi aquas in aërem emittentis $= n$, amplitudines autem reliquorum foraminum, per quæ aquæ trajiciuntur intra machinam, deſignentur litteris α, β, γ, &c. & erit, poſita utrobique eadem *potentia movente*, altitudo debita velocitati aquæ effluentis ad ſimilem altitudinem nullis obſtantibus foraminibus internis, ut

1 ad $1 + \frac{nn}{\alpha\alpha} + \frac{nn}{\beta\beta} + \frac{nn}{\gamma\gamma} +$ &c. (per §. 11. *ſect.* 8.) ſequitur inde factis iſtis altitudinibus inter ſe æqualibus, fore *potentias moventes* ut

$1 + \frac{nn}{\alpha\alpha} + \frac{nn}{\beta\beta} + \frac{nn}{\gamma\gamma} +$ &c. ad 1, & quia utrobique velocitates potentiarum moventium eædem ſunt, ſimilem quoque pro iisdem temporibus rationem habebunt *potentiæ abſolutæ*. Superflua igitur eſt pars ejus $\frac{nn}{\alpha\alpha} + \frac{nn}{\beta\beta} + \frac{nn}{\gamma\gamma} +$ &c. unde diſpendium *potentiæ abſolutæ* erit ad totam hanc potentiam ut

$$\frac{nn}{\alpha\alpha} + \frac{nn}{\beta\beta} + \frac{nn}{\gamma\gamma} + \text{\&c. ad } 1 + \frac{nn}{\alpha\alpha} + \frac{nn}{\beta\beta} + \frac{nn}{\gamma\gamma} + \text{\&c.}$$

Scholium.

§. 16. Quoties idea machinæ foramina poſtulat, per quæ aquæ ex uno modiolo in alium transfluant (quod fit in omni antliarum genere; veluti aſpirantium, *aſpirantes* gallice aut prementium, *foulantes* &c.) ſunt illa foramina quantum id reliquæ circumſtantiæ permittunt, ampliſſima facienda, ita ut amplitudo orificii effluxus parva admodum ſit reſpectu illorum foraminum internorum: Ut vero uſus regulæ clarius pateat, exempla conſiderabimus machinarum aliarum non minus uſitatarum.

Exemplum I.

Propoſita ſit machina (quam repræſentat Figura 50.) in qua emboli C & F alternatim deprimuntur, atque per diabetas A B, D E aquæ in modiolum B E H intruduntur, ut ſic jactus fiat continuus per orificium H. Cum hic emboli alternatim agant, alterutrum conſiderabimus quaſi ſolum ſed continue agentem; ita vero conſiderandum eſt foramen effluxus H, amplitudinis Fig. 50.

nis n, & alterutrum foraminum o, p, quibus ſingulis ſit amplitudo α; ita erit diſpendium *potentiæ abſolutæ* $= \frac{nn}{\alpha\alpha}$, poſita potentiâ integra $= 1 + \frac{nn}{\alpha\alpha}$, quæ quantitates ſunt ut nn ad $nn + \alpha\alpha$. Conſiderabile certe eſt hoc diſpendium, ſi iconibus harum machinarum fidere licet, in quibus ſæpe orificia o & p minora ſunt orificio effluxus H, quod ſi foret plus quam dimidium perderetur *potentiæ abſolutæ*. Erunt autem canales AB & DE per totum tractum, quantum id licet, amplificandi, ut machina parum de ſuâ præſtantia perdat.

Ceterum fuit hæc machina excogitata, ut jactus fieret continuus per H. Quia tamen fieri non poteſt, quin aliquod temporis intervallum intercedat inter ultimum emboli elevationis punctum, inſtantisque ejusdem depreſſionis initium, non poterit jactus omnino eſſe continuus & æquabilis. Huic vero incommodo optimum remedium attulit auctor machinæ illius, cujus mentionem facit D. Perrault in *Comment. ad Vitruvium pag.* 318. *edit.* 2. *Paris.* quamque in Bibliotheca Regia Paris. aſſervari dicit; inſerviet nobis hæc machina alterius exempli loco: figuram autem deſumam una cùm ejusdem deſcriptione ex ipſo Perraultio.

Exemplum 2.

„ Machina eſt referente præfato Perraultio, in quâ aqua expellitur ex
Fig. 51. „ modiolo A (Fig. 51.) mediante embolo B in catinum FG, ex quo aër,
„ ſi modo aliquid aquæ jam adſit, egredi non valet; quia tubus EF us-
„ que ad fundum fere deſcendit: ſic enim fit, ut aqua propulſa ex modio-
„ lo A per diabeten D, imumque catini occupans claudat orificium tubæ in
„ F, aërique tranſitum neget. Igitur cum embolus novas intrudit aquas
„ in mediolum, partim aëre partim aqua, repletum, hæ aquæ de novo af-
„ fuſæ vim exerunt in utrumque fluidum, & cum aqua non poſſit exilire
„ per tubum FE eadem velocitate qua irruit ex antlia per diabeten D, quia
„ ſcilicet (ſunt verba Perraultii) tubus FE in extremitate ſua E orificio per-
„ forata eſt multo minori, quam eſt orificium tubi D, aqua in catino ac-
„ cumulata aërem comprimit, ab eodemque reciproce preſſa, etiam dum
„ embolus elevatur, per tubam FE exilit. „

Perditur in hâc machina magna *potentiæ abſolutæ* pars à tranſitu aquæ per diabeten D, hocque diſpendium eo majus erit, quo anguſtior eſt iſte tubulus: fiat

fiat igitur amplus aut etiam plures tubi conſtruantur aquas transmittentes: majoris eſt momenti hæc annotatio in præſenti caſu, quod multo majus diſpendium ab anguſtia diabetes D oritur, quam in aliis machinis; fac enim amplitudinem hujus diabetes eandem, quæ eſt orificio E, & pone inſuper æqualibus temporis intervallis embolum deprimi, retrahique non perdetur jam ſolum dimidia *potentiæ abſolutæ* pars, ut aliàs, ſed plane quatuor quintæ partes inutiles fient. Quia vero multa ſunt in hâc machina, quæ ſingularem poſtulant calculum, placet illam ſeorſim perluſtrare.

Digreſſus continens aliquas commentationes in Machinam Hydraulicam quam repræſentat figura 51.

(α) Non poteſt jactus aqueus per E eſſe omnino æquabilis, durante tota emboli agitatione: Dum enim embolus elevatur, novæ aquæ non accedunt, atque ſic diminuitur quantitas aquæ in catino G E contentæ, aërque eidem ſuperincumbens dilatatur ac denique elater ipſius diminuitur: hinc quoque velocitate continue minori aqua erumpit donec rurſus ab embolo intruſo acceleretur.

Verum ſi ponatur ſpatium, quod aër in catino occupat longe majus ſpatio illo ab aqua, quæ durante una emboli elevatione ejicitur, occupato, ceſſat fere tota hæc inæqualitas, poſito embolum uniformiter agitari & diu ante fuiſſe agitatum, quæ poſterior hypothſis ideo neceſſaria eſt, quod primæ agitatione valde differant à ſequentibus. Igitur brevitatis ergo omnibus hiſce hypotheſibus ſatitfaciemus, ideſt, ubique *ſtatum*, qui dicitur, *permanentiæ* ponemus.

(β) Cum igitur primis emboli agitationibus ſenſim augeatur velocitas aquæ per E effluentis, mox fit ut jactus aqueus velocitatem tantum non integram attingat; quo rei ſtatu poſito, patet tantum aquæ depreſſione emboli impelli in catinum, quantum ex eodem tota emboli agitatione ejicitur.

Primis autem agitationibus plus intruditur, quam ejicitur, idque non ideo, ut putavit Dn. Perrault, quod orificium in E altero in G minus ſit (idemque enim ſuccederet ſi vel majus eſſet) ſed quod cauſa efficiens non poſſit ſtatim omnem ſuum exerere effectum in ejiciendis aquis.

(γ) Videbitur fortaſſe rem non ſatis perluſtrantibus fore, ut omnibus in ſtatu permanente jam poſitis, nullisque præſentibus obſtaculis alienis, aqua per foramen E velocitate exiliat, qua aſcendere poſſit ad altitudinem columnæ aqueæ in æquilibrio poſitam cum preſſione emboli: atque ita ſane foret, ſi preſſio emboli ſine interruptione adeſſet, nullusque in aqua *aſcenſus potentialis* perderetur: quia vero in utroque res aliter ſe habet, non poteſt non alia oriri in jactu aqueo velocitatis æſtimatio: Hinc quiſque non obſcure videt animum advertendum eſſe ad temporum rationem, quibus embolus deprimitur, retrahiturque, tum etiam ad rationem amplitudinum in canaliculo D & orificio E.

(δ) Ponamus igitur tempus quo embolus deprimitur $= \theta$; tempus unius integræ agitationis $= t$, amplitudinem orificii E $= \mu$, & diabetes D $= m$: deinde comparata potentia embolum detrudente cum ſuperincumbente columna aquea, faciamus hujus columnæ altitudinem $= a$, altitudinem vero aquæ exilientis velocitati debitam $= x$. His ita ad calculum præparatis licebit duobus indagare modis rationem quæ futura ſit inter velocitates aquarum in orificio E & diabete D, atque hinc valorem incognitæ x elicere. *Primò* enim patet tempore θ (quo ſcilicet embolus detruditur) tantum aquæ fluere per diabeten D, quantum tempore t (quo embolus deprimitur retrahiturque) effluit per E. Eſt igitur velocitas in D ad velocitatem in E ut $\frac{1}{m\theta}$ ad $\frac{1}{\mu t}$: & quum poſterior hæc velocitas ſit $= \sqrt{x}$, erit altera $= \frac{\mu t}{m\theta}\sqrt{x}$. *Secundò* quia velocitas aquæ effluentis debetur preſſioni aëris in catino, ſequitur hanc preſſionem æquivalere ponderi columnæ aqueæ altitudinis x; ſed ſi à preſſione emboli auferas preſſionem aëris, habebis preſſionem, quæ velocitatem aquæ in D generet; hinc quia differentia preſſionum exprimitur per $a - x$, repræſentabitur velocitas aquæ in D per $\sqrt{(a-x)}$; Igitur nunc eſt velocitas aquæ in D ad velocitatem aquæ in orificio E ut $\sqrt{(a-x)}$ ad $\sqrt{x}$. Combinatis rationibus utroque modo inventis, fit

$$\sqrt{(a-x)} : \sqrt{x} = \frac{1}{m\theta} : \frac{1}{\mu t}, \text{ ſive}$$

$$x = \frac{mm\theta\theta}{mm\theta\theta + \mu\mu tt} \times a.$$

Pa-

Patet ex iſta æquatione altitudinem jactus duplici titulo deficere ab altitudine columnæ prementis a, magis nempe deficit, cum celerius deprimitur, tardiuſve elevatur embolus tum etiam cum orificium E ratione canaliculi D amplitudine creſcit. Fuerit v. gr. amplitudo iſtius orificii æqualis amplitudini tubuli D atque pari celeritate embolus deprimatur eleveturque & prodibit $x = \frac{1}{5} a$, ſic ut ad quintam partem tantum aſſurgat vena effluens altitudinis a.

(ϵ) Diſpendium *potentiæ abſolutæ* jam hoc modo eruetur, poſito prius nullum laborem in elevandum embolum impendi. Sit velocitas quâ embolus deprimitur $= v$, & erit *potentia abſoluta* tempore unius agitationis integræ impenſa $= a v \theta$ (per paragraphum tertium) quia vero effectus in eo conſiſtit, ut effluxus fiat per E durante tempore t ipſaque aqua ad altitudinem $\frac{mm\theta\theta}{mm\theta\theta + \mu\mu tt} \times a$ elevetur, potuiſſet id antlia ſimplex figuræ quadrageſimæ quintæ efficere, ſi pro *potentia premente* in illa ſumtus fuiſſet cylindrus aqueus altitudinis $\frac{mm\theta\theta}{mm\theta\theta + \mu\mu tt} \times a$, atque hæc potentia durante tempore t velocitate $\frac{\theta}{t} v$ egiſſet; unde *potentia abſoluta* in hâc machina ſimplici, qua nihil de illa perditur, requiſita futura fuiſſet $=$

$$\frac{mm\theta\theta}{mm\theta\theta + \mu\mu tt} \times a \times \frac{\theta}{t} v \times t = \frac{mm\theta\theta}{mm\theta\theta + \mu\mu tt} \times a v \theta.$$

Eſt igitur tota *potentia abſoluta* ad partem ejus inutiliter perditam ut $a v \theta$ ad $a v \theta - \frac{mm\theta\theta}{mm\theta\theta + \mu\mu tt} \times a v \theta$ ſeu ut $mm\theta\theta + \mu\mu tt$ ad $\mu\mu tt$. Igitur ſi integra *potentia abſoluta* deſignetur per P, erit ejus diſpendium $= \frac{\mu\mu tt}{mm\theta\theta + \mu\mu tt} \times P$.

Neceſſe igitur eſt in hâc præ aliis antliis, ut diabetes amplitudine admodum ſuperet orificium E, vel ut multiplex adſit. Si enim unicus adeſſet, isque amplitudine orificio E æqualis, ſimulque uniformi velocitate ſurſum deorſumque agitari ponatur embolus, diſpendium oriretur quatuor quintarum totius partium: atque ſi vel duplo amplior fiat, etiamnum perdetur dimidium *potentiæ abſolutæ*.

(ζ) Denique perſpicuum eſt minorem preſſionem ſuſtinere latera catini G E, quam modioli A A, quippe preſſiones iſtæ ſint ut x ad a, id eſt, ut

mm

$mm\theta\theta + \mu\mu tt$ ad $mm\theta\theta$, ex qua ratione artifices judicabunt de firmitate laterum, quæ pro utroque requiritur.

Regula 8.

§. 17. Quando embolus in antliis retrahitur & aqua in modiolum influit, non ſolum proprio pondere ſolicitata ſed maximam partem ab embolo attracta, tunc omnis *potentia abſoluta* in hanc attractionem impenſa caſu ſupervenit, quia antlia, ſub aquis, ut fit, poſita, ſua ſponte impleretur ſi ſufficiens huic impletioni tempus concederetur; nec adeoque attractio illa ita pertinet ad ejiciendas aquas certa cum velocitate, quin tota vitari poſſit, hocque nomine labor in illam impenſus mihi inutilis dicitur.

Quia vero influxus aquarum partim proprio pondere fit, partim etiam elevatione emboli, non poteſt diſpendium *potentiæ abſolutæ* ab effectu æſtimari: Quin potius calculus ita eſt ponendus, ut poſitis potentia embolum in certo ſitu elevante $= \pi$, velocitate emboli $= v$, tempuſculoque quantitatibus π & v reſpondente dt, dicatur omnis *potentia abſoluta* in elevationem emboli impenſa $= \int \pi v dt$ vel $= \int \pi dx$, ſi per dx intelligatur elementum ſpatioli tempuſculo dt percurſi. Sequitur inde, ſi conſtantis magnitudinis ſit, uti fere eſt conatus, quo embolus elevatur, fore *potentiam abſolutam* æqualem *potentiæ moventi* ductæ in ſpatium percurſum: ſimile autem ratiocinium cum valeat etiam pro depreſſione emboli ſimulque tantum elevetur embolus quantum deprimitur, apparet *potentias abſolutas*, quæ in attrahendas expellendaſque alternatim aquas impenduntur, proxime eſſe ut *potentiæ* utrobique *moventes*; unde diſpendium oritur quod eſt $= \frac{\pi}{\pi + p} \times P$, factis ſcilicet potentia elevante $= \pi$, potentia deprimente $= p$ & *potentia abſoluta* in elevationem depreſſionemque emboli impenſa $= P$.

Poteſt aliter diſpendium *potentiæ abſolutæ* proxime æſtimari ex eo, quod omnis *aſcenſus potentialis* aquæ in antliam influentis inutiliter generatus cenſeri debeat. Sed ſi iiſdem temporibus, ſive eadem velocitate embolus ſurſum deorſumque movetur, erit velocitas quâ aquæ admittuntur ad velocitatem quâ ejiciuntur reciproce ut foramina reſpondentia, ipſique *aſcenſus potentiales* utrobique erunt in ratione quadrata inverſa foraminum reſpondentium. Si deinde diver-

diverſis temporibus fiant emboli elevatio & depreſſio, ſunt velocitates reciproce ut tempora & *aſcenſus potentiales* reciproce ut quadrata temporum. Eſt igitur *aſcenſus potentialis* aquæ influxu generatus ad *aſcenſum potent.* qui ab effluxu oritur ſolusque intenditur, in ratione reciproca quadrata compoſita ex ratione foraminis influxus ad foramen effluxus & temporis, quo hauriuntur aquæ ad tempus quo expelluntur.

Scholium.

§. 18. Ex utraque æſtimandi ratione ſequitur lente embolum eſſe elevandum: ita enim parva fit *potentia movens* ratione primæ methodi aut magnum fit tempus elevationis ratione ſecundæ, atque ſic operarii ſingulis elevationis emboli intervallis à conatu præcedentis depreſſionis exantlato reficientur. Poſterior porro methodus indicat foramina, per quæ aquæ attrahuntur amplianda & multiplicanda eſſe; id vero etiam priori conforme eſt methodo, quia ſic ſufficiens fere aquæ quantitas ſua ſponte influit, minorique adeo *potentia movente* opus eſt.

Regula 9.

§. 19. Denique jactum aqueum verticaliter aſſurgentem nunquam eam attingere altitudinem obſervandum eſt, quæ debeatur aquæ velocitati initiali, id eſt, ſi vena fluidi verticaliter aſſurgere incipiat ab ſua origine velocitate tali, quam grave libere cadendo ex altitudine a acquirat, non poterit fluidum aſcendere ad totam altitudinem a, etiamſi aëris reſiſtentiam removeas, aut quicquid excogitare velis, quod caſu motum retardare queat. Ipſa enim rei natura defectum aliquem exigit neceſſario, cujus rei ratio phyſica hæc eſt: Nempe quælibet guttula etiamſi aſcenſum incipiens verticalem, non poteſt tamen, quin ſenſim ad latera deflectatur & tandem, cum ad ſummum pervenit, motu feratur horizontali, qui notabilis eſſe debet, quia per ſupremum limbum vel ſectionem venæ aqueæ omnis aqua tranſit, quæ per foramen effluxit: fac igitur unicuique guttulæ eo temporis puncto quo horizontaliter movetur velocitatem ineſſe, quam grave lapſu libero per altitudinem b acquirit: ita vides non poſſe venam ultra altitudinem $a - b$ aſſurgere: Atque hoc titulo diſpendium oritur ratione *potentiæ abſolutæ* totius ut b ad a.

Scholium.

§. 20. Obſervatum fuit inter aquas communi velocitate ex tubulis di-

verſimode formatis ejectas alias aliis altius aſſurgere: Ergo hic attendendum eſt ad ultimorum tubulorum aquas emittentium (*des ajutages*) conformationem aptiſſimam.

Hâc de re experimenta inſtituit D. Mariotte in *tract. de mot. aquar.*

Scholium Generale.

§. 21. Examinavimus adhuc impedimenta, quæ caſu ſuperveniunt in machinis hydraulicis aquas cum impetu ejicientibus: Præcipua illa eſſe puto, quæ expoſui; poterunt tamen alia inſuper excogitari, ſed, ut credo, minoris admodum momenti. Ubique fere menſuras dedimus omnino geometricas ſimulque modum indicavimus, quo iiſdem impedimentis maximâ ex parte obviam iri poſſit. Qui majoribus intendit, putans poſſe minimo labore ſeu (quod eodem recidere demonſtravi § 3.) minima *potentia abſoluta* quemvis effectum in elevandis aquis deſideratum præſtari, opinione fallitur, atque oleum & operam perdet. Si enim ab impedimentis iſtis expoſitis aliiſve ſimilibus fortaſſe excogitandis animum abſtrahas, machina in rerum natura perfectiſſima erit ſimplex antlia figuræ quadrageſimæ quintæ, atque ſi aquæ ejus ope in altum projectæ colligantur in G, dico fieri non potuiſſe ut minori labore eadem aquarum quantitas ad eandem altitudinem F G elevarentur.

Eſt deinde aliud machinarum genus, quod à machinationibus adhuc pertractatis differt in eo, quod hæ aquas cum impetu ejiciant, illæ placide ſine motu notabili transferant. Sed & in his ultimus perfectionis qui dari poteſt gradus eodem recidit. Sunt autem pleræque multis obſtaculis iiſque maximi momenti obnoxiæ. De his igitur nunc directe nobis erit agendum.

(B) *De machinis hydraulicis aquas ſine notabili impetu ex loco humiliori in altiorem tranſportantibus.*

Regula 10.

§. 22. Si pondus aliquod per datam altitudinem verticalem (*a*) *potentia movente* utcunque variabili ſed directe applicata elevetur nullusque motus in ſummitate altitudinis propoſitæ corpori ſuperſit, conſtanter erit eadem *potentia abſoluta* in elevationem ponderis impenſa, nempe æqualis producto ex pondere corporis elevati & altitudine elevationis *a*.

De-

Demonſtratio.

Nam ſi pondus, quod vocabo A, aſcenderit per altitudinem y, eoque in loco animari ponatur potentia movente variabili P directe applicata, moverique velocitate v, erit tempuſculum, quo pondus per elementum dy elevatur $= \frac{dy}{v}$, quod ductum in *potentiam moventem* P, ejuſdemque velocitatem v, dat elementum *potentiæ abſolutæ* (per defin. §. 2.) $= P\,dy$, ergo $\int P\,dy$ dabit totam *potentiam abſolutam*, ſi poſt integrationem fiat $y = a$; in omni vero motu incrementum velocitatis dv eſt æquale potentiæ animanti ſeu moventi, quæ hîc eſt $\frac{P-A}{A}$ ductæ in tempuſculum quod nunc eſt $\frac{dy}{v}$; habemus igitur $dv = \left(\frac{P-A}{A}\right) \times \frac{dy}{v}$ vel $A\,v\,dv = P\,dy - A\,dy$, id eſt, $\frac{1}{2} A\,vv = \int P\,dy - Ay$, ſive $\int P\,dy = \frac{1}{2} A\,vv + Ay$, ubi faciendum eſt $y = a$ & $v = o$ (per hypoth.) ita ut ſit $\int P\,dy = A\,a$.

Quia autem, ut vidimus, $\int P\,dy$ exprimit integram *potentiam abſolutam* in elevandum pondus impenſam, erit eadem hæc potentia conſtanter eadem, nominatimque æqualis producto ex pondere A & altitudine a, ut habet propoſito. Q. E. D.

Corollarium.

§. 23. Ex demonſtratione noſtra apparet, eſſe quoque *potentiam abſolutam* eandem, quoties velocitas in ſummitate eſt eadem, id eſt, quoties altitudo ad quam corpus velocitate ſua reſidua aſcendere poteſt, nempe $\frac{1}{2} vv$ eſt conſtans: atque ſi altitudo iſta dicatur b, erit *potentia abſoluta* $= A(a+b)$. Igitur patet nunc, quanta pars *potentiæ abſolutæ* perdatur, cum animus ſit pondus A ad altitudinem a elevare, idemque in ſummitate velocitatem reſiduam habeat debitam altitudini b; erit nempe diſpendium potentiæ ad integram potentiam ut b ad $b+a$.

Scholium I.

§. 24. Cavendum itaque eſt, ne machinæ ita ſint conſtructæ, ut vehementi motu aquæ ad locum deſtinatum transportentur. Parvum autem eſſe ſolet iſtud diſpendii genus in plerisque machinis.

Scholium 2.

§. 25. Omnia ſimiliter ſe habent ſi corpus non verticaliter, ſed ſuper plano utcunque inclinato, aut etiam curva qualicunque elevetur, ſemper enim tota *potentia abſoluta* erit æqualis A $(a + b)$, id eſt, producto ex pondere in altitudinem elevationis auctam altitudine velocitati corporis in ſummitate reſiduæ debita, cujus rei demonſtratione ſuperſedeo, quod parum differt à præcedente demonſtratione.

Scholium Generale.

§. 26. Quia omnium machinarum utcunque compoſitarum effectus reduci poſſunt ad naturam plani inclinati, perſpicuum eſt omnes machinas, ſi à frictionibus iisque *potentiarum abſolutarum* diſpendiis, quæ hactenus recenſuimus, animum removeamus eodem recidere, quia *potentia abſoluta* ſimpliciter pendet ab altitudine ad quam corpus eſt elevandum ejusdemque pondere. Habet hoc commune *potentia abſoluta* cum *vi viva* ſeu cum *aſcenſu deſcenſuve actuali.* Isque ultimus eſt perfectionis machinarum gradus, quem transgredi non licet, imo nec attingere quidem, ſemper enim remotis omnibus frictionibus diſpendiisque, potuiſſet eadem *potentia abſoluta* majus pondus ad eandem altitudinem elevari. Ut jam comparatio inſtitui poſſit quædam circa machinarum defectum, tam illarum quæ aquas ad deſideratam altitudinem veluti projiciunt, quam quæ easdem transportant, nunc harum poſteriorum defectus maxime notabiles quoque indicabimus.

(I.) Frictiones tanto obſtaculo ſunt in plerisque hujusmodi machinis, ut ſolæ maximam *potentiæ* partem abſorbeant, præſertim autem cum aſſerculi quadrati aut globi ovales, catena in circulum redeunte connexi, per canalem, cui ſunt accommodati, transeuntis aquas elevant.

(II.) Pleræque machinæ, præſertim vero rurſus quas modo indicavimus, roſariorum nomine deſignari ſolitæ ita ſunt comparatæ, ut aqua dum elevatur continue pars ejus deſtillet, ſive plane decidat in locum ex quo hauſta fuit ſive ſaltem ex loco ſuperiori in inferiorem, uti in roſariis; ſi in his globuli aut aſſerculi canali ſunt bene adaptati frictio fit fere inſuperabilis, ſin minus maxima aquæ quantitas per hiatus relictos deſtillat, ex ſuperio-

rioribus diviſionibus in inferiores, ita ut minima aquæ pars in illis ſuperſit, cum culmen attigerunt, ejus quantitatis quam in toto itinere receperunt. Videntur itaque vel ſolo hoc nomine iſtæ machinæ admodum improbandæ, præſertim vero ſi aquæ limpidæ ſint elevandæ, quæ antliis hauriri poſſint.

(III.) Solent quoque machinæ ejus eſſe indolis, ut aquam ultra altitudinem propoſitam attollant: Perditur autem potentia quæ exceſſui reſpondet, atque ſi aquæ trans molem ſunt evehendæ, difficulter id obtinetur, quod indicavi §. 12.

(IV.) Sunt & machinæ, quæ directam potentiæ moventis applicationem non admittunt, ex quâ obliquitate rurſus diſpendium aliquod oritur.

§. 27. Iſtaque fere ſunt, quæ notabilis momenti mihi viſa fuerunt, obſtacula; neſcio autem an illis in tantum obviam iri poſſit, quantum de primo machinarum genere demonſtravimus: frictionum diminuendarum artificia quædam norunt mechanici: machinas quæ ſitulis aquas hauriunt atque elevant prætulerim roſariis: ſitulæ autem ita ſint fabricatæ, ſi modo id fieri poſſit, ut in ſitu infimo ſtatim impleantur nihilque emittant priusquam ad ſitum ſupremum pervenerint. Cum aqua transfundenda eſt trans locum altiorem in alium minus altum, opera danda eſt, ut impetus aquæ labentis promoveat motum tympani ſeu rotæ in gyrum agendæ, quamvis multum abſit ut ſic *omnis potentia abſoluta* utiliter impendatur, prouti fieri antlia figuræ 49. indicavimus (§. 12.) Principium actionis conſiſtet, ſi recte judicio, aptiſſime in calcatura: homines enim iſti labori maxime ſunt aſſueti; pertinet huc, quod monui §. 4. occaſione regulæ primæ de angulo acclivitatis, ſub quo viator dato tempore minima defatigatione certam attingere poſſit altitudinem verticalem. Crediderim hominem mediocris ſtaturæ, ſanum & robuſtum ſuper via ad 30. gradus acclivi incedentem non dificulter ſingulis horis 3600. pedes confecturum, atque proinde ad altitudinem verticalem 1800. pedum pondus corporis ſui, quod ponam 144. librarum ſeu duorum pedum cubicorum aquæ, elevaturum. Talis igitur homo poterit ope machinæ calcatura circumagendæ & perfectiſſimæ (in qua ſcilicet nihil de *potentia abſoluta* perdatur) ſingulis horis duos pedes cubicos aquæ ad altitudinem verticalem 1800. pedum elevare, ſeu quod idem eſt, ſingulis minutis ſecundis unum ped. cub. ad alt. unius pedis: machinas quæ multo minoris

ſunt effectus, officium facientibus operariis, parum puto commendabiles: Interim inſtituto experimento in ædibus Ill.. D. *General* de Coulon cum antlia, quod in fine ſectionis apponam, effectum haud parum minorem expertus ſum, quo confirmatus ſum in ſententia mea operarios calcatura plurimum præſtare: facile autem prævideo in machinis admodum compoſitis longe minorem effectum prodire, quia in his maxima *potentiæ abſolutæ* pars inutilis impenditur. Notabile iſtius rei nunc afferam exemplum à notiſſima machina Marlyenſi, oſtenſurus quam incredibile fere *potentiæ abſolutæ* diſpendium ab omnibus impedimentis collectis oriatur.

Tractatum edidit Weidlerus de *machinis hydraulicis* in quo plenam deſcriptionem facit machinæ Marlyenſis, atque refert omnes aquas elevari à motu 14 rotarum, quarum alæ ab impetu ſequanæ propellantur: hunc impetum facit pro omnibus rotis æqualem ponderi 1000594 librarum, isque eſt quem nos deſignavimus nomine *potentiæ moventis*. Præterea alas motu ferri ex aliquibus circumſtantiis colligere potui, quo conficiant $3\frac{3}{4}$ pedes ſingulis minutis ſecundis, atque hæc velocitas habenda eſt pro velocitate *potentiæ moventis*; deinde addit ſingulis diebus elevari vi illius machinæ 11700000 libras aquæ ad altit. 500 ped. His ita poſitis videamus nunc in machina ſimpliciſſima fig. 45, qua nihil de *potentia abſoluta* perdi intelligatur, quanta ad iſtam effectum potentia P pariter velocitate ut $3\frac{3}{4}$ mota requiratur. Erit autem altitudo F G $=$ 500 ped. & quoniam tempore 24 horarum ejici debeant per lumen F 11700000 libræ, id eſt, 162500 ped. cub. magnitudo iſtius luminis ponenda erit $=$ 0,0108 partium pedis unius quadrati: Velocitas aquæ in F tanta eſt, ut abſolvat ſingulis minutis ſecundis 173 ped. Igitur continet velocitatem $3\frac{3}{4}$, quam pondus P habere ponitur, 46 vicibus & toties ſuperare debet amplitudo antliæ A B amplitudinem luminis F: Erit proinde amplitudo A B fingenda 0,4968, part. ped, quadrat. ex quo conſequens eſt, pondus P æquale futurum ponderi cylindri aquei ſuper baſi A B ad altitudinem 500 ped. conſtructi ſeu ponderi 248,4 pedum cub. aquæ, id eſt, ponderi 17885 librarum, quæ tantum quinquageſimam ſextam partem efficit *potentiæ moventis* quam eadem velocitate motam applicari oſtendit Weidlerus. Sic igitur in tota machina diſpendium fit quod $\frac{55}{56}$ integræ *potentiæ abſolutæ*. exæquat.

Poſtquam ita naturam machinarum hydraulicarum, quantum illud in ge-

generalibus fieri poteſt, examinavimus, haud abs re erit exemplum aliquod ſpeciale accuratius pertractare, & quia cochlea Archimedis multis gaudet egregiis proprietatibus, quas nemo ſatis, quantum ſcio, aperuit, ab hâc exemplum deſumam idque eo libentius, quod multi ſint, qui contra noſtras regulas putant ſingularem huic cochleæ virtutem ineſſe pro elevanda magna aquæ quantitate brevi tempore parvaque vi: falluntur autem qui ita cogitant: nam ſi obſtaculorum accidentalium nulla habeatur ratio, idem præſtat eadem *potentia abſoluta*, quod reliquæ machinæ omnes.

Commentationes ſpeciales de Cochlea Archimedis.

(I.) Varii ſunt auctores, qui modum docuerunt conſtruendi hanc cochleam: ſumma huc redit, ut canalis quidam aut plures ſuperficiei cylindricæ circumflectantur, & ita quidem ut canalis ubique eandem habeat inclinationem ratione axis cylindri, quam Vitruvius præter neceſſitatem in omnibus cochleis fieri jubet ad angulum ſemirectum. Requiritur ergo ante omnia, ut in ſuperficie cylindri linea ſpiralis ducatur ad cujus normam canalis ſit ponendus, id quod facillime meo judicio in ſuperficie admodum polita fieri poterit (præſertim cum helices non parum à ſe diſtare debent) circumvolvendo eidem aliquoties funiculum: hic enim tenſus ſua ſponte deſideratam lineam faciet, neque enim ſpiralis ſibi ſimilis ubique eſſe poteſt, aut conſtantem habere ad axem cylindri inclinationem, quin arcus inter duo puncta interceptus ſit omnium arcuum eoſdem terminos habentium minimus, quam indolem funiculo extenſo competere palam eſt: ſi vero frictiones impedimento ſint, filum ad minora intervalla extendi poterit. Sed non eſt, cur in re per ſe pluribus modis facillima ſcrupuloſi ſimus.

Lex ſpiralis primaria eſt, ut ubique æqualiter ad axem cylindri inclinet, cui legi ſequens innititur conſtructio, quam in gratiam infra dicendorum apponam:

Finge cylindrum rectum M*a f*N (Fig. 52. (1)) cujus ſuperficiei ſit inſcribenda deſiderata ſpiralis *a* 1 *b* 2 *c* 3 *d* &c. eandemque ſuperficiem puta explicatam in planam figura præditam parallelogrammi rectanguli A *a f* F (Fig. 52. (2)), ſumantur hic ab una parte AB, BC, CD, DE, & EF, ab altera Fig. 52. (1.) Fig. 52. (2.)

tera

tera ab, bc, cd, de, & ef, ſingulæ ſingulis æquales; jungantur lineis rectis puncta B, C, D, E & F cum punctis a, b, c, d, & e: his ita factis, ſi ſuperficies plana rurſus in cylindricam convolvatur, junctis lineis AF & af, coincidentibuſque punctis A & a; B & b &c. fiet ut lineæ aB, bC, cD &c. in ſuperficie cylindrica lineam continuam forment, quæ ipſa erit ſpiralis deſiderata. Ad faciliorem intellectum in utraque figura puncta homologa communibus litteris diſtinxi.

(II.) Propoſitus jam fuerit cylindrus MafN (Fig. 52. (1)), habens ad ductum ſpiralis modo deſcriptæ circumflexum canalem, cujus diametrum veluti infinite parvum cenſebimus ratione diametri ad cylindrum pertinentis: atque ſic habebitur cochlea Archimedis, quâ ſi uti velimus ad elevandas aquas ex M in N, cylindrus erit horizontem verſus inclinandus, & ita quidem ut angulus aMH (interceptus inter diametrum baſeos Ma, quæ eſt in plano verticali, & horizontalem MH) ſit major quam angulus sao, quem faciunt tangentes circuli & ſpiralis in communi puncto a. Deinde converſo cylindro circa axem ſuum in directione aghMs aquæ influent per inferius canalis circumducti orificium effluentque per ſuperius.

(III) Ut naturam hujus elevationis recte intelligamus, tria ſe nobis offerunt puncta in qualibet ſpiralis helice examinanda, nempe puncta o, p & q, quorum primum o maxime diſtat ab horizonte, alterum p eidem proximum eſt, & q in eadem altitudine poſitum eſt cum puncto o in helice proxime inferiori ſumto: per ſingula puncta o ducta eſt recta gn; per puncta p recta hm & per puncta q recta st. Situs vero harum linearum determinabuntur in ſequentibus.

(IV) Sit radius, qui pertinet ad baſin cylindri, $= 1$ ſumaturque pro ſinu toto; ſinus anguli $sao = m$, ejuſdemque coſinus $= M$, ſinus anguli aMH $= n$, ejuſdemque coſinus $= N$; arcus $ag = X$; coſinus illius arcus $= x$, erit perpendiculum ex o in horizontem demiſſum, nempe $or = \frac{mNX}{M} + n(1 + x)$. Quia vero or maxima eſt, fit $\frac{mNdX}{M} + ndx = o$, & cum ex natura circuli ſit $dX = \frac{-dx}{\sqrt{1-xx}}$, erit $\frac{-mNdx}{M\sqrt{(1-xx)}} + ndx = o$, ergo $\sqrt{1 - xx} = \frac{mN}{Mn}$. Eſt igitur ſinus arcus quæſiti $ag = \frac{mN}{Mn}$ aut coſinus

$x =$

$x = \pm \frac{\surd(nn - mm)}{Mn}$: ſignum ſuperius dat arcum ag, inferius arcum ah determinantem puncta infima p.

Atque ſic determinavimus tum puncta ſuprema o, tum ima p, patetque arcus Mb & ag eſſe inter ſe æquales, ſimul autem ex quantitate irrationali $\surd(nn - mm)$ valorem litteræ x afficiente colligitur fieri non poſſe, ut m ſit major quam n: neque enim in hoc caſu punctum datur infimum, quod tota ſpiralis ubique aſcendit continue: Neque etiam inſerviet ſic cochlea ad elevandas aquas; unde jam patet ratio ejus, quod monui in articulo hujus digreſſionis ſecundo, de requiſito exceſſu anguli aMH ſupra angulum sao.

(V) Ponamus nunc globum alicubi eſſe in cavitate canalis, cochleamque in ſitu ſuo firmari: ſic minime quieſcet globus, quin exiſtat in puncto aliquo p. Quod ſi vero cochlea non retineri ponatur, globus deſcendet, deſcenſuque cochleam circumaget, atque ſi præterea fingatur, nullius eſſe ponderis cochleam motumque globi liberrime fieri nihil obſtantibus frictionibus, deſcendet globus ſuper recta mb non alia lege, quam globus libere ſuper plano inclinato deſcendens. Apparet itaque potentiam requiri ad impediendum globi deſcenſum, firmandamque cochleam. Iſtam potentiam applicatam ponemus in puncto f in plano circuli & perpendiculariter ad radium inquiſituri in rationem, quam habeat ad pondus globi in puncto aliquo p quieſcentis.

Sit pondus globi $= p$: quia vero actio globi eſt verticalis, reſolvenda erit in duas alias ad perpendiculum ſibi inſiſtentes, quarum una communem habeat cum axe cochleæ directionem, altera eidem perpendicularis ſit, prior cum nihil ad circumagendam cochleam conferat rejicienda, poſteriorque ſola conſideranda erit; eſt vero actio illa reſidua $= np$ & agit in vectem, qui eſt $=$ ſinui arcus Mb ſeu arcus ag, hicque ſinus (*per. art. IV.*) eſt $= \frac{mN}{Mn}$. Eſt igitur momentum actionis $= \frac{mN}{Mn} \times np = \frac{mNp}{M}$; hoc ſi dividas per radium baſeos, qui eſt vectis pertinens ad potentiam applicatam in f in æquilibrio poſitam cum actione globi, habebis iſtam potentiam quæſitam $= \frac{mNp}{M}$. Sic igitur directe ex natura vectis deducere licet, quod

alii ex principio alieno petere ſolent. Præmiſſis iſtis præmittendis uſum machinæ conſiderare nunc incipiemus, quem habet pro elevandis aquis.

Problema.

(VI) Quæritur quænam maxima ſit aquæ quantitas quam cochlea quavis revolutione ejicere poteſt.

Solutio.

Conſideremus helicem integram $a\,1\,b$, ſitque quantitas aquæ quam plena continet $= q$: Notandum autem eſt non poſſe helicem eſſe totam aqua repletam, ſi enim totus canalis plenus eſſet, effluerent aquæ per orificium inferius, igitur quivis ramus, qualis eſt $a\,1\,b$, partim aëre partim aqua occupatur, erit autem altera aquæ extremitas in o ceu puncto ſupremo, altera in q, ceu puncto ad libellam cum priori compoſito: pars igitur aqua plena eſt $o\,p\,q$, atque ſi hæc pars ponatur ad longitudinem totius helicis $a\,1\,b$ ut g ad b, erit maxima aquæ quantitas una revolutione ejicienda $= \frac{gq}{b}$. Q.E.I.

Scholium I.

(VII) Quoniam, ut diximus, fieri non poteſt ut aqua per totum canalis tractum ſit contigua, cavendum eſt, ne ſeparatio aquæ impediatur, quod facile fieri poteſt cum totum cylindri fundum aquæ immergitur, quia ſic aëri prohibetur ingreſſus per orificium inferius canalis: Neque faciendum eſt, ut nimia fundi pars extra aquam promineat, quia ſic cochlea non omnem, quam una revolutione alias poſſet, aquam haurit; imo nihil hauriet, ſi immerſio punctum b non attingat: Debita autem fiet immerſio usque ad punctum g, quia ſic arcus helicis $o\,p\,q$, qui aquam retinere valet, maximus ſit. Etſi enim nunquam rei periculum fecerim, & plerique auctores aliter de illa loqui videantur, malim tamen rationi, quam auctoritati illorum, qui ad immerſionem hanc animum non adverterunt, credere.

Regula igitur *ratione immerſionis* hæc obſervabitur, fundum nempe ſubmergetur, donec chorda arcus extra aquam eminentis ſit $= \frac{2\,mN}{Mn}$, ubi litteræ m, N, M, & n idem ſignificant, quod in articulo quarto.

Scho-

Scholium 2.

(VIII) Apparet quidem poſt levem rei contemplationem eò majorem eſſe rationem inter arcum helicis *opq* & integram helicem *a1b*, id eſt, inter *g* & *b*, atque proinde eo majorem ceteris paribus aquæ quantitatem ſingulis revolutionibus ejici, quo minor eſt angulus *sao* & quo major angulus *a*MH, ſeu quo minor eſt diſtantia inter duas proximas helices & quo magis cochlea verſus horizontem inclinat: Veram autem illam rationem algebraice exprimere non licet: In omni tamen caſu particulari id facili appropinquatione obtinetur.

Exemplum præcedentis regulæ deſumam à cochlea, qualem Vitruvius adhibere & conſtruere docet. Facit autem angulum *sao* ſemirectum & ſic $m = M = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0,70710$: deinde inter NG & MG rationem ſtatuit, quæ eſt ut 3 ad 4; inde deducitur angulus GNM vel *a*MH $= 53^\circ, 8'$, ejusque ſinus $n = 0,80000$ atque conſinus $N = 0,60000$: ergo (per *art. III.*) eſt ſinus arcus *ag* altiſſimum punctum *o* definientis $= \frac{mN}{Mn} = \frac{3}{4}$, ipſeque arcus $ag = 48^\circ, 35'$. Debet adeoque vi regulæ *art. VII.* arcus extra aquam eminens in fundo eſſe $97^\circ, 10'$; immergeturque arcus $262^\circ, 50'$.

Ut jam præterea definiamus rationem inter arcum helicis *opq* & helicem integram *a1b*, notandum eſt, eandem eſſe illam rationem, quæ intercedit inter arcum circularem *gb*M*s* & circumferentiam circuli, quod ex figura ſocia manifeſtum eſt. Determinatur autem arcus *gb*M*s* hunc in modum. Eſt nempe arc. *gb*M*s* = arc. *agb*M*s* — arc. *ag*. Sed vidimus in articulo tertio, ſi ex quocunque puncto ſpiralis, veluti *o* & *q* perpendicula ad horizontem punctum M radentem demittantur, qualia ſunt *or* & *qx*, fore iſtud perpendiculum $= \frac{mNX}{M} + n(1+x)$ ſeu in noſtro caſu $= 0,60000X + 0,80000(1+x)$, denotante X arcum circularem, puncto in ſpirali aſſumto reſpondentem, nempe arcum *ag* aut arc. *agb*M*s* & *x* ſignificante ejusdem arcus coſinum. Eſt vero arc. $ag = 48^\circ, 35' =$ (quia radius exprimitur unitate) 0,84797, ejuſque coſinus = 0,66153: Igitur in noſtro caſu fit $or = 0,50878 + 1,32922 = 1,83800$. Quia porro puncta *o* & *q* ſunt in eadem altitudine poſita, atque lineæ *or* & *qx* inter ſe æquales, apparet quæſtionem nunc eo eſſe reductam, ut alius arcus *agb*M*s* inveniatur puncto *q* reſpondens,

 qui

qui ſi vocetur X, ejuſque coſinus x, ſit $o, 60000 X + o, 80000 (1 + x) = or = 1, 83800$: pro iſta conditione invenitur arcus *agh*M*s* proxime 175½ *grad.* incidente puncto *s* in plagam *ag*M: Et cum arcus *ag* fuerit 48°, 35', erit tandem arcus *gh*M*s* 126°, 55', qui proinde erit ad circumferentiam circuli præterpropter ut 10 ad 29: ſimiliſque ratio intercedit inter arcum helicis *opq* integramque helicem.

Conſequens inde eſt, ſingulis revolutionibus cochlea à Vitruvio deſcripta proxime ejici $\frac{10}{29}$ illius quantitatis, quam helix integra & plena continet, ſeu paullulum ultra trientem.

Scholium 3.

(IX) Notandum tamen eſt, quæcunque ſit aquæ quantitas, quæ qualibet cochleæ revolutione canalem inferius ingreditur, ſuperiuſque ex eodem effluit, nullum nec detrimentum nec lucrum propterea cadere in *potentiam abſolutam* ſi nulla habeatur frictionum ratio, quia *potentia movens* cæteris paribus illi quantitati proportionalis eſt. At vero quia frictiones ſemper obſtant, eædemque fere ſunt ob pondus machinæ proprium, ſive major ſive minor quantitas aquæ hauriatur, opera utique danda eſt, ut iſta quantitas cæteris paribus fiat maxima: Hâc de re nunc agam paullo diſertius.

Scholium 4.

(X) Jam innui ſuprà, creſcere rationem arcus *gh*M*s* ad circumferentiam circuli decreſcentibus angulis *sao* & NMG: uterque igitur minimus eſſet conſtruendus, niſi alia obſtarent incommoda, præſertim ratione anguli NMG. Quod ad angulum *sao* attinet, poteſt is fere ad lubitum diminui, neque aliud inde incommodum reſultat, niſi quod latera canalis circumflectendi nimis ad ſe invicem accedere poſſunt: E contrario à diminutione iſtius anguli aliud obtinetur compendium, nempe quod tunc eo verticalius poſſit erigi machina ipſaque aqua eo altius elevari, etenim angulus *a*MH ſemper major eſſe debet angulo *sao*: à verticaliori autem cochleæ poſitione ſimul obtinetur, ut minori incommodo ſit machinæ proprium pondus eaque facilius ſuſtineatur.

Hæc ita perpendens crediderim fere ſufficere poſſe angulum 5 *graduum*, quem faciat canalis cum baſe nuclei. Cardanus quoque minorem iſtum fecit angu-

angulum quam Vitruvius, & cum eo pauciores ſuper eodem nucleo circumflecti poſſint canales, quo obliquius ſunt inſerti, Vitruvius octo, Cardanus tres tantum ponendos ſtatuit: ſunt autem canales longiores in cochlea Cardani, ita ut longitudinibus accedat, quod numero canalium decedit. Ratione alterius anguli NMG obſervari meretur, aquam altius elevari poſſe, quo major iſte fiat angulus, ſed è contrario minorem aquæ quantitatem ſingulis ejici revolutionibus. Juſtum fortaſſe tenebunt medium, qui angulum iſtum 60. facient gradum.

(XI.) Subducemus nunc hujus noſtræ quoque ad normam præcedentis articuli conſtructæ cochleæ calculum, prouti fecimus de cochlea ad Vitruvii præceptum conſtructa, art. VIII. Quia vero per hypotheſin angulus sao eſt $5°$ & angulus NMG $= 60°$; reperietur per *art.* IV. arcus ag $8°, 43'$, & linea verticalis $or = 1,00574$, cui æqualis erit altera verticalis qx, ſi dentur arcui $agbMs$ $284°, 57'$, a quo ſi ſubtrahatur arcus ag, remanet arcus $gbMs$ $276°, 14'$: qui reſpondet arcui helicis aquam retinere valenti: eſt igitur hæc pars ad totam helicem ut 16574 ad 21600 vel ut 8287 ad 10800, ſic ut ſingulis revolutioniqus ejici poſſint plus quam quatuor quintæ partes integræ helicis capacitatis, duplumque cum triente præterpropter hac machina efficiatur, quam obtinetur ſimili machinatione ad mentem Vitruvii fabricata: altius quoque eodem nucleo elevantur aquæ in ratione ut $\sqrt{3}$ ad $\sqrt{2}$. Venio jam ad *potentiam* tum *moventem* tum *abſolutam*, quæ in elevandis aquis impenditur.

Problema.

(XII.) Dato pondere aquæ in helice quieſcentis, invenire potentiam tangentialem in f in æquilibrio cum illo pondere poſitam.

Solutio.

Vidimus quomodo problema hoc geometrice ſolvendum ſit ratione globi in puncto infimo p quieſcentis. In præſenti vero caſu paullo aliter ſe res habet, quod pondus aquæ per magnum helicis arcum eſt diſtributum, neque in puncto aliquo dato concentratum. Facile quidem eſt in anteceſſum prævidere, in utroque caſu eaſdem fore potentias ex regulis mechani-

cæ

cæ indirectis; placet tamen hujus rei demonſtrationem dare ex natura vectis petitam, quia mechanici eo omnia reducere amant.

Helicem conſiderabimus $a\,1\,b$ ex figura quinquageſima ſecunda ſeorſim deſumtam, ad evitandam linearum confuſionem, conſervatis denominationibus *art.* IV. adhibitis. Sic igitur in Figura 53. erit rurſus angulus N M G angulus quem facit nucleus cum horizonte, cujus ſinus $= N$, ſinusque anguli $aMH = n$; $a\,1\,b$ eſt una ſpiralis circumvolutio: baſis nuclei eſt circulus $acMpa$; ſinus anguli pal eſt ut ante $= m$, ejusque coſinus M; puncta vero l & o ſunt extremitates aquæ in ſpirali quieſcentis & in eadem altitudine ab horizonte poſita, ex iſtis punctis ductæ ſunt ad peripheriam baſis rectæ lc & op ad baſin perpendiculares. In parte helicis quam aqua occupat ſumta ſunt duo puncta infinite propinqua m & n & per hæc ductæ ſunt rectæ nf & mg rurſus ad baſin perpendiculares. Denique ex punctis c, f, g, p ductæ ſunt ad diametrum aM perpendiculares cd, fh, gi & pq; atque centrum baſis ponitur in e, radiusque $ea = 1$. Sit jam arcus ſpiralis $l\,1\,o$ aqua plenus $= c$ & conſequenter arcus circularis eidem reſpondens $cMp = Mc$; $al = e$; $ac = Me$; ad (ſeu ſinus verſus arcus ac) $= f$; $aq = g$; pondus aquæ in $lso = p$: arcus $aln = x$; $nm = dx$; $acf = Mx$; $fg = Mdx$; $ah = y$; $hi = dy$; $hf = \sqrt{2y - yy}$, erit pondus guttulæ in $nm = \frac{p\,dx}{c}$; ſi vero linea hf multiplicetur per ſinum anguli aMH, dividaturque per ſinum totum, habetur vectis quo particula nm cochleam circumagere tentat: eſt igitur vectis iſte $= n\sqrt{(2y - yy)}$ qui multiplicatus per præfatum guttulæ pondus $\frac{p\,dx}{c}$ dat ejusdem momentum $\frac{np\,dx}{c}\sqrt{(2y - yy)}$. Sed ex natura circuli eſt $M\,dx = \frac{dy}{\sqrt{(2y - yy)}}$: hoc igitur valore ſubſtituto pro dx, fit idem guttulæ nm momentum $= \frac{np\,dy}{Mc}$, cujus integralis, ſubtracta debita conſtante, eſt $\frac{np(y - f)}{Mc}$, denotatque momentum aquæ in arcu ln; hinc igitur momentum omnis aquæ in $l\,1\,o$ eſt $= \frac{np(g - f)}{Mc}$: quod diviſum per vectem potentiæ in f applicatæ ſeu per 1 relinquit potentiam iſtam quæſitam pariter $= \frac{np(g - f)}{Mc}$. Q. E. I.

Scholium

Scholium 1.

(XIII.) Ut appareat, non differre valorem iſtius potentiæ ab illa, quam pro globo ejusdem ponderis p invenimus articulo V. nempe $\frac{mNp}{M}$, demonſtranda eſt æqualitas inter $\frac{np(g-f)}{Mc}$ & $\frac{mNp}{M}$ ſeu inter $n(g-f)$ & m N c: iſta vero æqualitas deducenda eſt ex eo, quod extremitates aquæ l & o in eadem ab horizonte altitudine poſitæ ſint; inde enim ſequitur, ut demonſtravimus *art.* IV. eſſe aggregatum ex arcu ac multiplicato per $\frac{mN}{M}$ & ex linea M d multiplicata per n = aggregato ex arcu ac M p pariter multiplicato per $\frac{mN}{M}$ & ex linea M q multiplicata per n. Adhibitis itaque denominationibus præcedentis articuli, fit $Me \times \frac{mN}{M} + (2-f) \times n = (Me + Mc) \times \frac{mN}{M} + (2-g) \times n$, vel $n(g-f) = mNc$; quæ æqualitas demonſtranda erat ad demonſtrandam æqualitatem potentiarum tum pro globo tum pro aqua in f applicandarum.

Scholium 2.

(XIV) Quia potentia $\frac{np(g-f)}{Mc}$ non differt ab $\frac{mNp}{M}$ & quantitas $\frac{mN}{M}$ eadem manet, quæcunque aquæ quantitas una revolutione hauriatur aut ejiciatur, erit potentia iſta proportionalis eidem quantitati aquæ ſingulis revolutionibus ejectæ ſeu ponderi p. Facile quoque demonſtratu eſt, ſi eadem aquarum quantitas, eadem *potentia movente* eademque velocitate ad parem altitudinem verticalem elevetur ſuper ſimplici plano, quod ad hunc finem debite verſus horizontem inclinatum ſit, fore ut tempus elevationis quoque idem ſit.

Igitur eadem *potentia abſoluta* requiritur in cochlea Archimedis, quam ſuper plano inclinato, ad quod omnes machinæ reduci poſſunt, nec ullam habet iſta cochlea prærogativam præ reliquis machinis in theoria ſpectatis. Fortaſſe in praxi minus eſt obnoxia incommodis §. 26. indicatis: nequaquam improbo ejus uſum, ſed nec eam præfero præ antliis Cteſibianis.

§. 28. Intelligitur ex hactenus dictis, quibus titulis una machina alteri præferenda ſit, quemnam machinæ perfectionis gradum admittant; ad quid potiſſimum attendendum ſit in illarum conſtructione & uſu; quanta *potentiæ abſolutæ* pars perdatur, aliaque ſimilia: Equidem machinas tantum conſideravimus *potentiis* ut dicuntur *animatis* motas: facile autem apparet iiſdem legibus ſubjectas eſſe machinas, quæ ab impetu aquarum, venti, aut ab aquarum gravitatione hujusmodique aliis principiis ſunt movendæ; ſemper enim *potentia movens* ducta in tempus & velocitatem puncti cui potentia eſt applicata, dabit productum ex quantitate aquæ & altitudine ad quam iſta quantitas aſſumto tempore elevari poſſit ope machinæ propoſitæ, ſepoſitis impedimentis alienis. Loquor autem de machinis, quibus nihil de *potentia abſoluta* perditur; fieri enim poteſt, ut maxima pars pereat, quod ſatis oſtendimus in ſuperioribus.

§. 29. Apparet exinde aquam ad certam altitudinem elevatam poſſe rurſus ſuo deſcenſu eundem præſtare effectum: effectus autem erit æſtimandus ex quantitate aquarum elevandarum & ex altitudine elevationis, ſic ut v. gr. deſcenſu 8. pedum cubicorum ex altitudine unius pedis poſſint totidem rurſus elevari pedes cubici ad ſimilem altitudinem aut 4. pedes cubici ad altitudinem duorum pedum, aut unus pes cubicus ad altitudinem 8. pedum & ſic utcunque libuerit. Specimen machinæ, quæ poſſit aquam ad quamcunque altitudinem elevare minimo aquarum deſcenſu, videre eſt apud D. Perrault in *Comment. ad Vitruvium lib.* 10. *cap.* 12. quam machinam ut incredibile fere paradoxon affert ejusque inventorem facit D. Franchini Italum, cujus induſtria & conſiliis in horto Bibliothecæ Regiæ cum ſucceſſu conſtructa fuit. Fundamentum machinæ in eo conſiſtit, ut ſitulæ concatenatæ, & in circulum redeuntes aquam excipiant eamque in locum tranſportent infimum, ibique effundant, dum alia ſitularum ſeries aquas hauriunt & ad locum longe altiorem, minori tamen copia ferunt atque effundunt: perſpicuum autem eſt, ſeriem priorem ſi omnes ſitulæ deſcendentes graviores ſint omnibus ſitulis aſcendentibus, alteram perpetuo in gyrum acturam eſſe; Machinæ etiam ſunt, quæ idem præſtant per ſimplices tubos ope epiſtomiorum ſtatis temporibus convertendorum, in quam quidem converſionem nulla potentia impenditur. Hujuſmodi machinationes deſcribit Carolus Fontana.

At ſi quis credat poſſe ex impetu aquarum ex certa altitudine delapſarum & in machinæ alas impingentium idem obtineri, is longe aberrabit. Talis

lis machinatio pertineret ad illarum claſſem, quibus maxima *potentiæ abſolutæ* pars evaneſcit ſine fructu.

Non abs re erit iſtud argumentum accuratius proſequi, & oſtendere quantus effectus ab impetu aquarum aut venti obtineri poſſit & ſub quibus circumſtantiis effectus iſte ſit omnium maximus dicendus.

(C) *De Machinis, quæ ab impetu fluidi, veluti vi venti moventur.*

§. 30. Poſtquam aquæ ad certam altitudinem elevatæ ex eâdem rurſus decidunt, continueque in alas rotæ circumagendæ impingunt, fieri aliter non poteſt, quin *potentia abſoluta* ad rotam ſic circumagendam requiſita multo minor ſit illa, quæ in elevationem aquarum impenſa fuit, cujus rei præcipua ratio eſt, quod aquæ poſt impulſum ad latera deſilientes velocitatem etiamnum conſervent, quæ ad rotæ rotationem nihil confert. Igitur magna *potentiæ abſolutæ* pars inutilis fieret, ſi elevatione aquarum efficiendum eſſet, ut ab impetu earundem machina circumagatur & ab hac denique aquæ rurſus aliæ ad certam altitudinem eleventur; & quidem major minorve pars perit pro diverſis circumſtantiis, nunquam vero, ut monſtrabo, minus quam $\frac{23}{27}$ totius perdetur, ſi ad normam vulgaris impulſus aquarum æſtimationis computus fiat.

§. 31. Statuitur autem communiter ſi aquæ ex cylindro valde amplo per ſimplex foramen tota ſua velocitate, id eſt, quæ toti altitudini aquæ ſupra foramen debeatur, fluant, atque vena ſtatim præ foramine directe impingat in planum, fore ut impetus fluidi contra planum in æquilibrio ſit cum pondere cylindri aquei, ſuper foramine ad altitudinem aquæ erecti. Experimento quidem fallaci auctores ſeducti hanc ſtabiliverunt theoriam omnino falſam. Nolui tamen hîc ab illa recedere, quia veram theoriam nondum expoſui atque deinceps facile erit expoſita noſtra theoria calculum corrigere. Liceat igitur, donec ſuo loco rem rectius perpenderimus, vulgari ſententiæ, quamvis erroneæ, adhærere. Quo major eſt impetus fluidi, eo majori ratione erit *potentia abſoluta*, quam dabimus, augenda.

§. 32. Finge nunc (Fig. 54.) vas A B C ceu antliam quæ aquas per foramen C in directione tantum non verticali expellat: aquas autem, cum ad ſummum pervenerint, ab alio vaſe E D F excipi. In alterius hujus vaſis fundo Fig. 54.

concipe foramen D, priori C æquale, & in eadem altitudine poſitum, ita ut tanta aquarum copia effluat per D, quanta ſuperius injicitur, ipſumque vas EDF conſtanter plenum ſervetur. Porro puta aquas per D effluentes perpetuo impingere in alas alicujus rotæ, quæ hoc modo circumacta aquas alias elevet: Loco iſtius machinæ deſcribitur in figura ſimplex vectis volubilis circa H, ponendo talem vectem continue alium atque alium adeſſe præ foramine D, qui aquas excipiat, atque altera ſua extremitate aquas hauriat, eaſdemque ad datam altitudinem elevet.

His ita poſitis inquiram primo in *potentiam abſolutam*, quæ aquas per foramen C ad altitudinem CE elevat; deinde quoque in *potentiam abſolutam*, quæ requiritur in G ad vectem eadem velocitate movendum, quâ movetur ab impulſu aquarum DG.

§. 33. Sit amplitudo foraminis C vel D $= n$, amplitudo AB $= m$, velocitas aquarum in C vel D $= v$, pondus cylindri ſuper foramine C aut D ad altitudinem CE extructi $= p$: tempus fluxus $= t$; erit pondus P $= \frac{m}{n} p$: velocitas, qua pondus dum aquæ expelluntur deſcendit $= \frac{n}{m} v$: eſt igitur (per §. 3.) *potentia abſoluta* in aquas per C ejectas impenſa $= \frac{m}{n} p \times \frac{n}{m} v \times t = pvt$.

§. 34. Ut jam *potentia abſoluta* in gyrationem vectis GL circa punctum H impenſa determinetur, notandum eſt illam minime ſibimet conſtare; mutari enim à mutata velocitate, quacum vectis circumagitur. Igitur faciemus velocitatem qua extremitas ejus in G movetur $=$ V. Hoc autem modo aquæ impingere cenſendæ ſunt in G velocitate $v - V$, atque ſic preſſionem exercere, quæ ſit $= \left(\frac{v-V}{v}\right)^2 p$: (ſunt enim preſſiones in ratione quadrata velocitatum fluidi impingentis atque pro velocitate v ponitur preſſio $= p$). Iſta vero preſſio eſt loco *potentiæ moventis*; poſſumus nempe loco preſſionis fluidi ponere pondus vecti ſuperincumbens in G, quod ſit $= \left(\frac{v-V}{v}\right)^2 p$. Iſtud vero pondus eadem velocitate movebitur quâ punctum G, nempe velocitate V, agitque durante tempore t: Eſt *igitur potentia abſoluta* ad rotationem vectis durante tempore t & velocitate V requiſita $= \left(\frac{v-V}{v}\right)^2 p \times V \times t$.

§. 35.

§. 35. Quod ſi igitur vectis L G non immediate circumagitur, ſed fluidum ad altitudinem C E elevatur, eo animo, ut vena fluidi ſuo impulſu in G vectem circumagendo ab altera parte aquam elevet, erit *potentia abſoluta* integra ad *potentiam abſolutam* utilem, ut pvt ad $\left(\frac{v-V}{v}\right)^2 pVt$, ſeu ut v^2 ad $(v-V)^2 V$: eademque ſe habebit ad partem ſui inutilem ut v^3 ad $v^3 - vvV + 2vVV - V^3$.

§. 36. In omnibus fere machinis, quarum principium motus conſiſtit in impulſu fluidi fieri ſolet, ut velocitas vectis, ubi fluidi impetum ſuſtinet, ſeu V ſit admodum parva ratione velocitatis fluidi v; in his autem maxima pars effectus, qui ab eadem fluidi quantitate pari velocitate moti obtineri poſſet, perditur.

§. 37. Maximus oritur ab impulſu fluidi effectus, ſive, quod idem eſt, maxima fit *potentia abſoluta* §. 34. definita, ſi ſit $V = \frac{1}{3} v$; & tunc eſt iſta *potentia abſoluta* $= \frac{4}{27} pvt$, atque etiamnum viginti tribus vigeſimis ſeptimis partibus deficit, à potentia ſimili, quæ in elevandas aquas ex C in E F impenditur.

Si proinde naturalis habeatur aquarum deſcenſus, atque illo utendum ſit ad elevandas aquas aliudve ſimile quid præſtandum, faciendum eſt ut machina eo in loco, quo fit impulſus, velocitate moveatur ſubtripla velocitatis fluidi impingentis. Huic vero conditioni ſemper ſatisfieri poteſt, quod ex allato vectis exemplo patet. Si enim majori velocitate moveatur punctum G, diminue partem H G manentibus reliquis aut eam auge, ſi minori moveatur velocitate punctum G. Vel etiam ſalva longitudine H G fac, ut aquæ in extremitate L majori minorive quantitate hauriantur.

§. 38. Iſta vero ratione fluidorum ad perpendiculum in alas impingentium: alius eſt computus pro fluidis oblique incidentibus in alas moletrinarum vi venti agitandarum aliarumque ſimilium machinarum. De his nunc pauca quædam ſuperaddam atque iis ſectioni huic finem imponam.

Quum fluidum in ſuperficiem totius alæ utcunque poſitæ & in directione ad motum fluidi perpendiculari rotaturæ impingit, docent auctores, fluidum maximum in alam exercere niſum ad promovendam rotationem, quando ala cum directione venti angulum facit, cujus ſinus ſit ad ſinum totum ut $\sqrt{2}$

ad $\surd$ 3; Si vero vena fluidi eadem atque tota excipiatur ab ala, modo ſic modo aliter ad directionem fluidi inclinatâ, maximam preſſionem ſuſtinebit in directione rotationis ala, quæ facit angulum ſemirectum cum directione fluidi.

Prima Regula pertinet ad machinas quæ à vento omnia ambiente circumaguntur: altera ad illas, quæ à vena ſolitaria & à certa determinataque fluidi quantitate moventur. Utraque vero hypotheſi innititur, quod motus alarum admodum parvus ſit reſpectu motus fluidi, ſi enim ad motum alarum reſpicias, ambæ regulæ falſæ ſunt; neque profecto iſte motus negligendus eſt, in moletrinis enim ſæpe obſervavi, extremitates alarum velocitate ferri, ipſam fere venti velocitatem exæquante.

Hæc cum ita ſint, calculum nunc ita ponemus, ut utriuſque motus rationem habeamus.

Fig. 55. §. 39. Sit igitur fluidum D E B A (Fig. 55.) quod ſub directione E B impingit in totum planum A B: moveri autem ponitur planum motu parallelo in directione B *b* ad E B perpendiculari: Sint porro velocitates ejusmodi, ut dum particula fluidi percurrit lineam E B, punctum plani B abſolvat lineam B *b*. His poſitis fingere licet totum ſyſtema, fluidum nempe cum plano moveri à *b* verſus B & quidem velocitate *b* B: Ita vero fiet, ut planum A B quieſcat, particula autem fluidi in punctum B incidens cenſenda ſit veniſſe expuncto *e*, ſumta E *e* = B *b*, & ſic de omnibus guttulis. Igitur loco fluidi D E B A in planum motum A B incidentis velocitate E B concipiendum erit fluidum *d e* B A in idem planum A B ſed immotum incidens velocitate *e* B: Producatur jam A B usque in *b* agaturque D E *d e b* perpendicularis ad E B, erit motus particulæ fluidi repræſentatus per *e* B reſolvendus in *e g* & *g* B, ſibi invicem perpendiculariter inſiſtentes, quorum poſterior nihil in planum A B agit, alter vero *e g* rurſus ex duobus compoſitus eſt motibus *e f* & *f g*, quorum poſterior *f g* planum A B inutiliter in directione E B propellere tentat; dum prior *e f* ſolus idem planum in directione B *b* propellit. Demonſtratum itaque eſt, quamlibet particulam facere impulſum proportionalem lineæ *e f*: Dein patet quoque, ſi linea A B repræſentet totum planum, fore numerum particularum dato tempore in planum impingentium repræſentandum per lineam B N perpendicularem ad A *d* ſeu B *e*. Unde tandem niſus aquarum ad movendum planum in directione B *b* eſt proportionalis lineæ *e f* ductæ in B N.

Ut

Ut jam determinetur inclinatio plani ad fluidum ſub his circumſtantiis maxime favorabilis ut motus plani in directione B b promoveatur: ponemus $AB = 1$, DE ſeu $AC = x$, $BC = \sqrt{1-xx}$; lineam EB, quæ repræſentat motum fluidi, $= v$, & B b ceu menſuram motus plani $= V$; atque ſic inſtituto calculo invenitur

$ef = xv\sqrt{(1-xx)} - (1-xx)V$, atque $BN = [xv - V\sqrt{(1-xx}]:$
$\sqrt{(vv+VV)}$; unde $ef \times BN = [xv - V\sqrt{(1-xx)}]^2 \times \frac{\sqrt{(1-xx)}}{\sqrt{(vv+VV)}}$, quæ quantitas maxima erit, cum fit

$$(9v^4 + 18vvVV + 9V^4)x^6 - (12v^4 + 30vvVV + 18V^4)x^4 + (4v^4 + 16vvVV + 9V^4)xx - 4vvVV = 0.$$

§. 40. Calculus ratione inclinationis alarum in moletrinis alius eſt, quia velocitates in diverſis alarum locis variæ ſunt; ſunt enim proportionales diſtantiis à centro, facile autem nunc cuivis erit computum pro moletrinis inſtituere, huic caſui non ulterius inſiſtam, ſufficiat id notaſſe, quod non ſatis accurate ſtatuatur ab auctoribus $xx = \frac{2}{3}$, & quod verus valor ipſius x ſemper minor ſit quam $\sqrt{\frac{2}{3}}$. Si fuerit v. gr. $V = v$, & omnia alæ puncta ſimili velocitate moveri cenſeantur, fiet $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$, quod indicat inclinandam eſſe alam ad directionem venti ſub angulo ſemirecto. Optima alarum conſtructio foret, ſi incurvarentur, ita, ut ſub angulo minori ventus in illas impingat ſuperius quam inferius, aut ſi fiat ut alæ ubique ventum ſub angulo medio quinquaginta præterpropter graduum excipiant.

§. 41. Pergo ad alterum caſum, quo omne fluidum à plano, utcunque id inclinatum ſit, excipi ponitur. Hic autem patet; quia numerus particularum dato tempore impellentium ſemper idem eſt, nullam eſſe attentionem faciendam ad linem B N, atque ſic niſum quem aquæ faciunt ad movendum planum AB in directione B b ſimpliciter repræſentari per ef ſeu $xv\sqrt{1-xx} - (1-xx)V$. Igitur niſus iſte maximus obtinebitur ſumendo $xx = \frac{1}{2} + \frac{V}{2\sqrt{(vv+VV)}}$, atque erit ipſe niſus tunc $= \frac{1}{2}\sqrt{(vv+VV)} - \frac{1}{2}V$, ſi per v intelligatur preſſio directa, quam vena exerit in planum cui perpendiculariter occurrit.

§. 42. Conſideremus nunc venam DEBA tanquam immediate ex ori-

ficio D in figura 54. egreſſam & vocemus rurſus directam preſſionem venæ ita conſideratæ p, ſicut §. 33; atque erit niſus iſtius aquæ, quo conatur planum debito modo, ut niſus maximus fiat, inclinatum propellere in directione ad venam perpendiculari $= \frac{p}{2v} \times (\sqrt{vv+VV} - V)$: Et ſi porro iſte niſus multiplicatur per velocitatem plani V atque tempus, obtinetur *potentia abſoluta*, qua planum eadem velocitate per idem temporis ſpatium moveri queat; ſic igitur præfata *potentia abſoluta* erit $= \frac{pVt}{2v} \times (\sqrt{vv+VV} - V)$.

§. 43. *Potentia abſoluta*, quam modo definivimus, ita eſt comparata, ut continue creſcat creſcente V, atque ſi velocitas V infinita ſumatur, fit eadem potentia $= \frac{1}{4} \times pvt$. Igitur cum in figura 54 vena D G uti volumus ad rotandam machinam per impulſum obliquum, nunquam plusquam quarta pars obtineri poteſt illius *potentiæ abſolutæ*, quæ in elevationem aquarum ex C in E F impenditur. Impulſu vero directo, nunquam plus quam $\frac{4}{27}$ obtineri vidimus §. 37. Ergo effectus fere duplo major impulſu obliquo ſeu motu rotæ horizontali quam impulſu directo, ſeu motu rotæ verticali obtineri poteſt.

Si vero impulſus fluidorum aliter æſtimetur quam §. 31. indicatum fuit, erit ubique in eadem ratione mutandus valor litteræ p, qua impulſus æſtimatio fuit mutata.

Experimentum, de quo §. 27. *ſect.* 9, mentionem feci, hoc eſt. Nempe unus operarius ope antliæ intra ſeptem minuta prima cum dimidio pedes cubicos ſedecim cum dimidio ad altitudinem quatuordecim pedum evexit.

Iſte vero effectus æqualiter diſtributus æquivalet huic actioni, qua dimidius præter propter pes cubicus ſingulis minutis ſecundis elevatur ad altitudinem unius pedis: Hic igitur effectus dimidius admodum eſt illius, quem hominem ſanum & robuſtum calcatura dare poſſe ex aliis deduxi principiis in paragrapho decimo ſeptimo. Non crediderim defectum petendum eſſe omnem à decrementis, quæ in *potentiam abſolutam* ex variis cauſis in iſta ſectione expoſitis cadere poſſunt, ſed potius ab eo, quod plus defatigentur homines ab agitatione emboli in antlia, quam à calcatura in rota calcatoria.

Ex-

Experimentum plane ſimile, ſed cum antlia longe perfectiori artificioque ſingulari fabricata, ante aliquot demum menſes Genevæ ſumſi præſentibus Viris Clariſſimis D. D. De la Rive, Calendrin, Cramer & Jalabert Acad. Genev. Profeſſ. ſucceſſus experimenti talis fuit, ut intellexerim operarium unum ſingulis minutis ſecundis quatuor quintas partes unius pedis cubici ad altitudinem unius pedis elevaſſe vel potius effectum æqualem præſtitiſſe. Notabile eſt experimentum, nec puto ulla alia machina effectum obtineri poſſe admodum majorem. Mirabile quoque id eſt, quod ſic omnis generis machinas, quacunque potentia animatas, ſi obſtacula demas effectum haud multo diſſimilem præſtare appareat. Re bene perpenſa ſtatuo, hominem machina perfectiſſima ſingulis minutis ſecundis pedem cubicum aquæ ad altitudinem unius pedis elevare poſſe aut effectum ſimilem producere.

Huc etiam pertinerent, præſertim ratione paragraphi trigeſimi primi, experimenta quæ accuratiſſime inſtitui ad æſtimandum impetum venæ fluidæ in planum impingentis, quibus confirmatus fui in theoria nova, quam hac de re ſtabiliveram ſimulque edoctus, errorem è Mariotti temporibus communem fuiſſe commiſſum. Quia vero in fine hujus ſectionis hac de re non diſertè ſermo fuit, atque in ſectione decima tertia expreſſe eam pertractare animus eſt, ideo eo usque diſquiſitiones haſce, ex principiis mechanicis nondum obſervatis, erutas differemus.

HYDRO-

HYDRODYNAMICÆ
SECTIO DECIMA.
De affectionibus atque motibus fluidorum elaſticorum, præcipue autem aëris.

§. 1.

FLuida nunc elaſtica conſideraturis licebit nobis talem iis affingere conſtitutionem, quæ cum omnibus adhuc cognitis conveniat affectionibus, ut ſic ad reliquas etiam nondum ſatis exploratas detur aditus. Fluidorum autem elaſticorum præcipuæ affectiones in eo poſitæ ſunt: 1°. ut ſint gravia, 2°. ut ſe in omnes plagas explicent, niſi contineantur, & 3°. ut ſe continue magis magisque comprimi patiantur creſcentibus potentiis compreſſionis: Ita comparatus eſt aër, ad quem potiſſimum præſentes noſtræ pertinent cogitationes.

§. 2. Finge itaque vas cylindricum verticaliter poſitum A C D B
Fig. 56. (Fig. 56.) atque in illo operculum mobile E F, cui pondus P ſuper incumbat: contineat cavitas E C D F corpuſcula minima motu rapidiſſimo hinc inde agitata: ſic corpuſcula, dum impingunt in operculum E F idemque ſuis ſuſtinent impetibus continue repetitis fluidum componunt elaſticum quod remoto aut diminuto pondere P ſeſe expandit: quod eodem aucto condenſatur & quod in fundum horizontalem C D haud aliter gravitat, ac ſi nulla virtute elaſtica eſſet præditum: ſive enim quieſcant corpuſcula ſive agitentur, non mutant gravitatem, ita ut fundum tum pondus tum elaſticitatem fluidi ſuſtineat. Tale igitur fluidum quod cum primariis convenit fluidorum elaſticorum affectionibus ſubſtituemus aëri, atque ſic alias, quæ jam in aëre detectæ fuerunt explicabimus aliasque nondum ſatis perpenſas ulterius illuſtrabimus proprietates.

§. 3. Corpuſcula cavitati cylindri incluſa conſiderabimus tanquam numero infinita, & cum ſpatium ECDF occupant, tunc aërem illa dicemus formare naturalem, ad cujus menſuras omnia ſunt referenda: atque ſic pondus

dus P operculum detinens in ſitu E F non differt à preſſione Atmoſphæræ ſuperincumbentis, quam proinde per P in ſequentibus deſignabimus.

Notetur autem hanc preſſionem minime æqualem eſſe ponderi abſoluto cylindri verticalis aërei operculo E F in atmoſphæra ſuperincumbentis, quod hactenus inconſiderate affirmarunt auctores: ſed eſt preſſio iſta æqualis quartæ proportionali ad ſuperficiem terræ, magnitudinem operculi E F & ponderi totius atmoſphæræ in ſuperficiem terræ.

§. 4. Quæratur jam pondus π, quod aërem E C D F in ſpatium e C D f condenſare valeat, poſitis velocitatibus particularum in utroque aëre, naturali ſcilicet & condenſato, iisdem: ſit autem $EC = 1$ & $eC = s$: Cum vero operculum E F transponitur in ef, majorem à fluido patitur niſum duplici modo: *primo* quod numerus particularum ratione ſpatii, cui includuntur, major nunc eſt, & *ſecundo* quod quævis particula ſæpius impulſum repetit: ut recte calculum ponamus incrementi, quod à *prima* pendet cauſa, particulas conſiderabimus ceu quieſcentes, atque numerum earum, quæ operculo in ſitu E F ſunt contiguæ, faciemus $= n$, & erit numerus ſimilis pro ſitu operculi in $ef = n : \left(\frac{eC}{EC}\right)^{\frac{2}{3}}$, ſeu $= n : s^{\frac{2}{3}}$:

Notetur autem fluidum à nobis conſiderari non magis condenſatum in parte inferiori, quam in ſuperiori, quale eſt, cum pondus P veluti infinitè majus eſt pondere proprio fluidi: Perſpicuum hinc eſt, hoc nomine vim fluidi eſſe, ut ſunt numeri n & $n : s^{\frac{2}{3}}$, id eſt, ut $s^{\frac{2}{3}}$ ad 1. Quod vero attinet ad alterum incrementum à *ſecunda* proveniens *cauſa*, invenitur id reſpiciendo motum particularum; atque ſic apparet impulſus eo ſæpius fieri, quo propius ad ſe invicem ſitæ ſunt particulæ: Erunt ſcilicet impulſuum numeri reciproce ut diſtantiæ mediæ inter ſuperficies particularum: Iſtæque diſtantiæ mediæ ita determinabuntur.

Particulas ponemus eſſe ſphæricas, diſtantiamque mediam inter centra globulorum pro ſitu operculi E F vocabimus D; diametrumque globuli deſignabimus per d: ita erit diſtantia media inter ſuperficies globulorum $= D - d$: patet vero in ſitu operculi ef fore diſtantiam mediam inter centra globulorum $= D\sqrt[3]{s}$, atque proinde diſtantiam mediam inter ſuperficies globulorum $= D\sqrt[3]{s} - d$. Igitur reſpectu ſecundæ cauſæ erit vis aëris na-

turalis E C D F ad vim aëris compreſſi e C D f ut $\frac{1}{D-d}$ ad $\frac{1}{D\sqrt[3]{s}-d}$, ſeu ut $D\sqrt[3]{s}-d$ ad $D-d$: Conjunctis vero ambabus cauſis erunt prædictæ vires, ut $s^{\frac{2}{3}}\times(D\sqrt[3]{s}-d)$ ad $D-d$.

Rationi D ad d aliam ſubſtituere poſſumus magis intelligibilem: nempe ſi putemus operculum EF pondere infinito depreſſum deſcendere usque in ſitum mn, in quo particulæ omnes ſe tangunt, atque lineam mC vocemus m, erit D ad d ut 1 ad $\sqrt[3]{m}$, quâ ratione ſubſtituta, erunt tandem vires aëris naturalis E C D F & compreſſi eCDf ut $s^{\frac{2}{3}}\times(\sqrt[3]{s}-\sqrt[3]{m})$ ad $1-\sqrt[3]{m}$, ſeu ut $s-\sqrt[3]{mss}$ ad $1-\sqrt[3]{m}$. Eſt igitur $\pi = \frac{1-\sqrt[3]{m}}{s-\sqrt[3]{mss}}\times P$.

§. 5. Ex omnibus phænomenis judicare poſſumus aërem naturalem admodum condenſari poſſe, & fere in ſpatiolum infinite parvum comprimi; facta igitur $m=o$, fit $\pi=\frac{P}{s}$, ita ut pondera comprimentia ſint fere in ratione inverſa ſpatiorum, quæ aër diverſimode compreſſus occupat; quod multiplex experientia confirmavit. Et poteſt certe hæc regula tuto accipi in aëre rariore quam eſt naturalis; an vero etiam poſſit in aëre admodum denſiori, non ſatis exploratum habeo: nec dum enim fuerunt experimenta ea accuratione, quæ hic requiritur, inſtituta: unico opus eſt ad definiendum valorem litteræ m, ſed eo accuratiſſime inſtituendo & quidem cum aëre vehementer compreſſo; gradus autem caloris in aëre, dum comprimitur, ſollicitè invariatus conſervetur.

§. 6. Elaſticitas interim aëris nonſolum à condenſatione augetur, ſed & ab aucto calore, & quia conſtat calorem intendi ubique creſcente motu particularum inteſtino, ſequitur, elaſticitatem aëris ſpatium non mutantis auctam, intenſiorem arguere motum in particulis aëris, quod cum hypotheſi noſtra recte convenit: perſpicuum enim eſt, eo majus requiri pondus P ad continendum aërem in ſitu ECDF, quo majori velocitate particulæ aëreæ agitantur: Imo non difficile eſt videre pondus P ſecuturum rationem duplicatam iſtius velocitatis, ideo quod ab aucta velocitate tum numerus impetuum tum intenſitas eorundem æqualiter creſcat, utrumq; vero ſeorſim proportionale ſit ponderi P.

Igitur

Igitur ſi velocitas particularum aërearum dicatur v, erit pondus, quod in ſitu operculi E F ſuſtinere valet, $= vvP$ & in ſitu $ef = \frac{1-\sqrt[3]{m}}{s-\sqrt[3]{mss}} \times vvP$, vel proxime $= \frac{vvP}{s}$, quia ut vidimus m numerus admodum exiguus eſt ratione unitatis & numeri s.

§. 7. Iſtud theorema, quod in præcedente paragrapho appoſui, quo nempe indicatur, *in omni aëre cujuſcunq; denſitatis ſed eodem caloris gradu prædito elaſticitates eſſe ut denſitates, atq; proinde etiam incrementa elaſticitatum, quæ fiunt à calore æqualiter aucto proportionalia eſſe denſitatibus*, Iſtud, inquam, theorema experientia edoctus fuit D. Amontons idemque recenſuit *dans les mémoires de l'Acad. R. des Sc. de Paris pour l'année* 1702. Senſus iſtius theorematis eſt, ſi v. gr. aër naturalis mediocris caloris pondus 100 lb. datæ ſuperficiei impoſitum ſuſtinere valeat, atque deinde calor ipſius augeatur donec 120 lb. eadem ſuperficie eodemque volumine ferre poſſit, fore ut idem aër in dimidium ſpatium condenſatus, & iiſdem caloris gradibus præditus reſpective ferre poſſit 200 lb. & 240 lb. ita ut incrementa 20 lb. & 40 lb. utrobique ab aucto calore genita ſint denſitatibus proportionalia. Affirmat porro aëris, quem vocat temperatum, elaterem eſſe ad elaterem aëris ejusdem cum aqua bulliente caloris, proxime ut 3. ad 4 vel accuratius ut 55 ad 73. At ego inſtitutis experimentis cognovi aërem calidiſſimum, qualis maxime fervente in hiſce terris eſt æſtate, tanti nondum eſſe elateris, quantum D. Amontons aëri tribuit temperato; imo nec ſub ipſo æquatore aërem unquam ejus eſſe caloris mihi perſuadeo. Meis autem magis fidendum eſſe puto experimentis quam Amontonianis, ideo quod in his aër non conſervarit ſuum volumen ejuſque variationis nulla ab Auctore habita fuerit ratio in calculo. Aëris qui hic Petropoli frigidiſſimus fuit die 25. Decembr. 1731. s^{t}. vet. elaterem deprehendi eſſe ad elaterem ſimilis aëris, communi cum aqua bulliente calore præditi, ut 523 ad 1000.

Sed anno 1733. d. 21. Jan. multo intenſius fuit frigus eique reſpondere obſervavi aëris elaſticitatem infra dimidiam ejus quam habet ſimilis aër ad aquam bullientem calefactus. Sed cum eſſet maximus aëris calor in loco umbroſo ann. 1731. elaſticitatem habuit proxime $\frac{4}{3}$ & accuratius $\frac{100}{76}$, ejus quam habuit aër frigidiſſimus & $\frac{2}{3}$ ejus quam habet aër ejusdem cum aqua bulliente

ca-

caloris: maximæ igitur caloris variationes in aëre hic locorum continentur intra terminos 3 & 4, quos in Anglia non ultra terminos 7 & 8 excurrere legi. Calor autem aëris, cujus elaſticitas tres quartas exæquet partes elaſticitatis aëris inſtar aquæ bullientis calidi, corpori animali fere intolerabilem eſſe puto.

§. 8. Ex cognita ratione inter diverſas ejusdem aëris eodemque ſpatio incluſi elaſticitates, facile eſt deducere menſuram caloris, qui ad aërem pertineat, ſi modo conveniamus in definiendo calore duplo, triplo &c. quæ definitio arbitraria eſt, neque in rerum natura poſita; mihi quidem videtur non incongrue aëris calorem ſi communis ſit denſitatis proportionalem ſtatui ejus elaſticitati. Primus autem caloris gradus, à quo reliqui menſuram accipiant, ſumetur ab aqua pluviali bulliente, quia huic procul dubio ubique terrarum idem proxime caloris gradus eſt.

His ita acceptis erunt calores aquæ bullientis, aëris tempore æſtivo calidiſſimi & aëris tempore hyemali frigidiſſimi in hiſce terris proxime ut 6, 4 & 3. Dicam nunc quemadmodum hoſce invenerim numeros, ut de accuratione experimentorum, quorum ſucceſſus ab Amontonianis diverſus admodum eſt, judicium ferri poſſit.

Fig. 57. §. 9. Barometro nempe uſus ſum ordinario ACBE, (Fig. 57.) idque hermetice ſigillari curavi in *m*; hoc modo inſtrumentum mutavi in thermometrum aëreum mutationibus barometricis non obnoxium: Creſcente enim calore intenditur elaterium aëris A *m* F altiorque fit columna mercurii BD, quam aër captus ſuſtinet & ſi ſpatium A *m* F veluti infinitum cenſeri poſſet, eſſet calor in ratione altitudinis BD (per §. §. 7. & 8.) atque hujus thermometri ope poterit menſura caloris ubique ſpecifice definiri. Si enim immergatur inſtrumentum aquæ bullienti pluviali in ſitu verticali obſerveturque punctum G ad quod ſuperficies mercurii aſcendit; fueritque deinde alius caloris gradus qualiscunque definiendus, qui mercurium ſuſtinuiſſe ad punctum D usque obſervatus fuerit, erit utique calor iſte ad calorem aquæ ferventis ut BD ad BG. Et cum ratio BD ad BG conſtans ſit, quæcunque fuerit altitudo BG, erit idem caloris gradus, de quo ſermo eſt, ubique locorum facile imitabilis. Poterit autem BG in centum aut mille dividi particulas atque hujusmodi particulis altitudo BD definiri.

Nihil

Nihil dico de modis hujusmodi thermometra ſenſibiliora reddendi; eorum quisque facile excogitabit plures, qui volet. Curetur autem, ut altitudo B E non ſit infra 4 pedes, imo ut major ſit, ſi etiam aliorum fluidorum bullientium gradus caloris, qui ſæpe major eſt quam in aqua, experiri animus ſit. Si minora hujusmodi thermometra deſiderentur, poterunt ea ita fieri, ut tempore ſigillationis in *m* ampulla vitrea A F igni lampadis apponatur ad rarefaciendum aërem in illa contentum, tuncque protinus ſigillatio fiat, & ne ſigillationi mora injiciatur, poterit prius ampulla vitrea in tubulum capillarem duci, qui vel leviter flammæ admotus illico colliqueſcat. Hoc modo thermometra obtinui non ultra quatuor aut ſex pollices longa, ſed parvæ virtutis. Cæterum multum refert, ut ſpatium E D ſit ab omni aëre, quantum fieri poteſt, vacuum, neque de iſto vacuo ſatis certi erimus cum viderimus in ſitu inſtrumenti horizontali mercurium extremitatem E attingere, quia fieri poteſt, ut aër, qui antea in ſpatio E D fuit, ſeſe in poros mercurii recipiat, rurſusque priſtinum ſpatium occupet deſcendente mercurio: tutius erit examen admovendo partem D E flammæ: ſi enim à calore flammæ ſuperficies D locum non mutet, indicium erit certum vacuum eſſe ab aëre ſpatium E D.

§. 10. In præcedente paragrapho conſideravimus ſpatium A *m* F ab aëre occupatum veluti infinitum ratione ſpatii D G aut D E: Quod ſi vero fuerit tantum octuplo vel decuplo majus, nondum licebit illud ſine notabili errore tanquam infinitum conſiderare: atque hinc conjicio ortum eſſe errorem aliquem in definiendo elatere aëris mediocriter calidi in experimentis Amontonianis.

Ut igitur accuratiſſime fiat experimentum, ita procedendum erit: Fuerit ſuperficies mercurii inferior in A F ducaturque horizontatis in A L: deinde pro caloris gradu qualicunque definiendo inclinetur inſtrumentum, donec ſuperficies mercurii ſit in puncto *g*, (quod idem eſt in quo mercurius ſubſiſtebat à gradu caloris aquæ ferventis in ſitu thermometri verticali) tuncque capiatur menſura altitudinis verticalis *g h*, quæ erit ad altitudinem G B vere ut elater aëris, cujus calor definiendus eſt, ad elaterem aëris inſtar aquæ ferventis calidi. Sic igitur calores erunt propie in ratione altitudinem *g h*. Priusquam hoc argumentum abrumpam, notaſſe conveniet (quandoquidem aliquibus fortaſſe videbitur *primum*, qui à nobis poſitus fuit, *caloris gradum* ab aqua bulliente deſumtum non ſemper nec ubique ſibi omnino conſtare) quod

loco caloris aquæ bullientis thermometrum etiam poſſit certis & fixis menſuris fieri, ſi experimento denſitas aëris exploretur ſeu ejus gravitas ſpecifica ſimulque altitudo barometri notetur. Si enim thermometrum inclinetur, donec ſuperficies mercurii fuerit in *g* & eo tempore altitudo barometri fuerit 28. *poll. Paris.* atque pes cubicus aëris, in quo thermometrum poſitum eſt, pondus habuerit 600. gran. Norimb. poterit altitudo verticalis *g h* ceu *primus* caloris gradus conſiderari. Si autem alio loco & tempore altitudo barometri fuerit 29. *poll. Paris.* & pondus pedis cub. aëris, qui ambit aliud thermometrum (in quo *primum* caloris *gradum* definire animus eſt) ſit 500. gran. Norimb. ac denique ſuperficies mercurii in thermometro rurſus ſit in *g*, erit altitudo verticalis primo caloris gradui conveniens $\frac{29.600}{28.500} \times g h$. In uſu thermometri inclinetur ſemper inſtrumentum, donec ſuperficies mercurii ſit in *g*: Volui methodum hanc apponere ut appareret quam facile ſit in theoria fixam dare caloris menſuram: In praxi vero alteram multo faciliorem ſatisque accuratam huic prætulerim.

§. 11. Veniamus nunc ad aëris conſiderandam atmoſphæram, quæ non à ſuperincumbente pondere alieno, ſed propria coërcetur mole: *Primò* autem examinabimus preſſiones columnarum aërearum verticalium atque æquilibria earum tum inter ſe tum cum columna mercuriali in barometris: *Secundò* elaſticitates aëris in variis atmoſphæræ altitudinibus ſupra mare atque altitudines reſpondentes barometricas rimabimur: Atque his præmiſſis, plurimis ſatisfaciemus phænomenis aliis ad mutationes atmoſphæræ pertinentibus.

§. 12. Sint duo tubi æquales amplitudinis verticales A C & B D
Fig. 58. (Fig. 58.) uterque indefinitæ altitudinis: Deinde finge tubulos ſtrictiores horizontales *a b*, *c d*, *e f*, *g h*, *l m*, *&c.* numero veluti infinitos, utrinque apertos & hiantes in tubos verticales. Puta præterea ubique aëreas particulas hos tubos occupantes eadem velocitate agitari, eundemque adeo caloris gradum habere: Ita dubium nullum eſt, quin funda A & B æqualiter premantur ſimulque ipſis æquale pondus (quod ſcilicet ipſum eſt pondus columnæ aëreæ indefinitæ A C vel B D) ſuperincumbat.

Intelligis etiam, ſi in æqualibus altitudinibus veluti in *g* & *h* diaphragmata fingas atque abeſſe putes aërem inferiorem *g* A & *h* B, etiamnum iſta diaphra-

phragmata utrinque æqualiter premi & æqualia eſſe pondera columnarum aërearum *g* C atque *h* D diaphragmatibus ſuperjacentium. Si igitur pondus totius columnæ aëreæ A C vel B D dicatur A, & pondus columnæ aëreæ *g* C vel *h* D ponatur B, erit pondus aëris inter A & *g* ſive B & *h* intercepti = A—B, pondus fundo A vel B ſuperjacens = A, & pondus diaphragmati in *g* vel *h* incumbens = B.

§. 13. At ſi inæquali velocitate in tubis A C & B D particulæ agitentur, res alia erit: tamen quæcunque fingatur velocitatum & calorum in ſingulis locis diverſitas, patet nihilominus utrobique æqualiter preſſum iri partes tubi in eadem altitudine poſitas, veluti in *g* & *h*, atque proinde diaphragmata, ſi fingantur utrobique in eadem altitudine poſita, æqualem preſſionem ſuſtentura eſſe. Si enim dicas minorem eſſe preſſionem in *g* quam in *h*, nihil erit quod fluxum aëris ex B D in A C per tubulum tranſverſum *h g* impediat, ſicque iſta poſitio contra ſtatum *permanentiæ*, quem ſupponimus, pugnabit.

Cum itaque loca in eadem altitudine poſita æqualiter à ſuperincumbente aëre premantur, erunt (p. §. 6.) denſitates in locis homologis quibuſcunque, veluti in *g* & *h*, proxime in reciproca ratione quadrata velocitatum, quibus in illis locis particulæ agitantur.

§. 14. Conſequens eſt ex præcedente paragrapho, ubique locorum eandem eſſe aëris preſſionem in æqualibus à ſuperficie maris altitudinibus, ſi atmoſphæra in ſtatu permanente æquilibrii poſita nulliſque agitata ventis putetur, quæcunque fuerit caloris differentia in diverſis atmoſphæræ partibus: Igitur ubique terrarum ſub æquatore & ſub polo eadem ſit oportet altitudo mercurii in barometris, quæ in ſuperficie maris aut in æqualibus ſuper illam altitudinibus poſita ſunt, ſi atmoſphæra nullis obnoxia ſit mutationibus. Pono autem aquas à ſuperficie maris terminatas ad commune æquilibrium eſſe poſitas, non quod id omnino neceſſe ſit, ſed quod nulla adhuc obſervata fuerit differentia: imo curſus (*les courans*) aquarum in multis oceani locis, qui ad eandem perpetuo diriguntur plagam, hanc hypotheſin non omni rigore accipiendam eſſe oſtendunt.

§. 15. Jam notavi denſitatem aëris in quovis tuborum verticalium loco pendere à calore reſpondente: Et cum diverſi eſſe poſſint caloris gradus manente

nente æquilibrio, diverſæ quoque eſſe poterunt denſitates: ponantur itaque denſitates in $g = D$, in $h = \delta$; finganturque utrobique duo ſtrata altitudinis æqualis & infinitè parvæ dx, poſita altitudine Ag vel $Bh = x$: Ita erit pondus columnæ aëreæ $Ag = \int D\,dx$ & columnæ $Bh = \int \delta\,dx$: atque hoc modó poterit tum integræ columnæ tum cujusvis partis pondus definiri: Interim apparet, minime requirere rei naturam, ut ſint pondera columnarum A C & B D vel Ag & B h vel denique g C & h D inter ſe æqualia, quamvis (per §. 13.) preſſiones tam in funda A & B quam in diaphragmatr g & h ſint inter ſe æquales; mirum id primo intuitu quibusdam fortaſſe erit, fieri poſſe ut fundum A aliam ſuſtineat preſſionem quam eſt pondus columnæ aëreæ indefinitæ A C ei ſuperincumbentis, quandoquidem omnibus in ſtatu ſuo permanentibus, ut fere videtur, concipi poſſint orificia a, c, e, g, &c. ſingula obturata, quo ſane in caſu dubium nullum eſt, quin preſſio fundi A ſit ipſum columnæ aëreæ ſuperjacentis pondus: hunc vero ſcrupulum ſibi quisque eximet hunc in modum: fingamus utramque columnam terminatæ altitudinis (quamvis enim ſine fine aſſurgant quamdiu particulæ motum aliquem ſervant, attamen terminatæ erunt, ſi eædem particulæ in ſuprema columnarum parte motu deſtitutæ ſint, ſicque ſimplex fluidum grave omni elaſticitate deſtitutum efficient) hoc poſito apparet 1°. columnam utramque ad communem aſſurgere altitudinem apertis tubulis transverſalibus, qui ubique adſunt. 2°. ſuprema ſtrata utrobique eſſe æque denſa, quia ſunt ad æquilibrium poſita & communem habent altitudinem. Ex hoc jam obvium eſt, quare non liceat tubulos transverſales conſiderare ceu obturatos, quod oſtendere conſtitui. Perſpicuum quoque eſt ex ſe, preſſiones ubique proportionales eſſe ponderi ſupremi ſtrati, ex quo conſequens eſt, quod jam §. 13. indicatum fuit, preſſiones ab utraque parte æquales inter ſe eſſe ſub æqualibus altitudinibus. Si jam columnæ nusquam terminatæ ſint, licebit mente ultima concipere ſtrata aut ſub æqualibus altitudinibus diaphragmata fingere utrobique æquali pondere onerata, ſic ut nihil vi demonſtrationis inde decedat.

§. 16. Igitur quum in barometro ex loco humiliori veluti A in altiorem g transportato mercurius deſcendit, non ſequitur pondus columnæ mercurialis, quæ in barometro deſcendit æquale eſſe ponderi columnæ aëreæ ejusdem diametri & altitudinis Ag, quod ab aliquibus ita aſſeritur. Et profectò cæteris paribus columna mercurii deſcendens eadem erit tam tempore hye-

hyemali quam æſtivo cum ex ſententia illa deberet tempore calido eſſe minor, quam tempore frigido: Eadem quoque erit in locis meridionalibus & ſeptentrionalibus.

Patet exinde quid cenſendum ſit de illa methodo, qua in Anglia aliquando uſos eſſe recenſet D. *Du Hamel in hiſt. Acad. Sc. Pariſ.* ad indagandam rationem inter gravitates ſpecificas aëris & mercurii: Obſervata nimirum altitudine mercurii in loco humiliori, tum etiam in altiori, gravitates ſpecificas in aëre & mercurio ſtatuerunt, ut erat differentia altitudinum mercurii in baro-metro ad altitudinem inter locos obſervationum interceptam: Etiamſi aër ejuſdem denſitatis ponatur ab imo obſervationis loco ad alterum uſque, non licet tamen inde judicare de ejus gravitate ſpecifica ratione mercurii. Quicquid ab experimento colligere licet, hoc ſolum eſt:

Conſideremus ſcilicet integram cruſtam aëream terram ambientem atque inter ambo obſervationis loca interceptam, & erit pondus iſtius cruſtæ ad ſuperficiem terræ, ut pondus columnæ mercurialis, qualis in barometro deſcendit ad baſin ejus; Manifeſta hæc ſunt ex eo quod ſumma baſium A & B ſuſtinent quidem ſummam ponderum, quæ habent columnæ aëreæ A C & B D, neque tamen quævis baſis premitur ſuæ columnæ pondere ſeorſim, & quod idem reſectis columnis A *g* & B *h* intelligi debet de columnis *g* C & *h* D, diaphragmatis in *g* & *h* poſitis, incumbentibus. Igitur experimentum non tam gravitatem ſpecificam aëris, in quo factum eſt, indicat quam omnis aëris terræ proximi gravitatem ſpecificam *mediam* determinat; prior admodum variabilis eſt, altera procul dubio conſtanter eadem fere permanet.

Faciamus computum *gravitatis ſpecificæ* iſtius *mediæ* aëris omnis, qui terram ambit: Multis vero experimentis, quæ in diverſis locis parum ſupra mare elevatis ſumta fuerunt, id conſtat, elevationi *66* pedum proxime deſcenſum reſpondere unius lineæ in barometro. Sequitur inde, quod aëris gravitas ſpecifica media ratione mercurii ſit, ut altitudo unius lineæ ad altitudinem *66*. ped. id eſt, ut ut 1 ad 9504; ergo poſita gravitate ſpecifica mercurii = 1, erit gravitas ſpecifica *media* aëris = 0, 000105. Notabile eſt profecto tantam eſſe hanc gravitatem mediam aëris: certus enim ſum vel maxime ſæviente hic locorum frigore, aëris gravitatem ſpecificam vixdum tantam eſſe, quantam nunc exhibuimus pro ſtatu medio omnis aëris terram ambientis: at ſub æquatore

tore multo erit minor & omnibus recte perpenſis non crediderim *gravitatem mediam* aëris, qui inter utramque latitudinem 60. gr. continetur, ultra 0,000090 excurrere; quo poſito erit *gravitas media* aëris ab utroque polo ad 30. gradus, terram cingentis, (quod ſpatium paullo pluſquam octavam totius terræ ſuperficiei efficit partem) = 0,000210, quæ dupla eſt aëris hic locorum denſiſſimi: ſub ipſo autem polo, præſertim antarctico admodum gravior erit aër & fortaſſe aqua vix decies levior, cum eſt frigidiſſimus atque denſiſſimus.

§. 17. Veniamus nunc ad mutationes tum atmoſphæræ tum barometri: Conſiderabimus ergo duo barometra utrobique in imo aëris loco poſita, alterum in A, alterum in B, & in utroque mercurium ad eandem altitudinem ſuſpenſum ponemus: Poſtea in A ſubito aërem admodum calefieri fingamus: Ita videmus fore, ut idem aër rarefiat: neque tamen inde ulla barometri mutatio proditura eſſet, ſi nullam aër haberet inertiam ad motum, etiamſi omnis aër ex AC in BD tranſpellatur: poſita autem iſta inertia ſupervenit quædam preſſio in omnes plagas eaque maxime ſenſibilis in regione A. Creſcet igitur ad tempus altitudo mercurii in utroque barometro, magiſque creſcet in A quam in B. Contrarium erit, ſi extemplo magna quædam aëris maſſa barometro A vel B vicina à frigore condenſetur.

§. 18. Hæc unica videtur cauſa, quæ aliquam in barometris in A vel B poſitis, efficere poſſit mutationem, quia hâc remotâ funda A & B ſemper æqualiter premuntur, nempe unuſquiſque pondere, quod ſit dimidium columnarum aërearum AC & BD ſimul ſumtarum, quæ quidem ponderum ſumma conſtans eſt. Si hæc ad atmoſphæram applicare velimus, notandum eſt funda A & B repræſentare loca ima atmoſphæræ, quæ quidem in ſuperficie terræ poſita forent, ſi aër terræ viſcera penetrare nequiret: quia vero res ſecus ſe habet, erunt loca fundis A & B analoga intra ſuperficiem terræ cenſenda.

§. 19. Putentur nunc barometra in *g* & *h* poſita; ſitque in ambobus mercurius ad eandem altitudinem ſuſpenſus: his poſitis cauſa fingatur ſupervenire, qua columna A*g* ſive ſola ſive conjunctim cum ſocia B*h* calefiat atque ſeſe expandat. His perſpicuum eſt, ſi vel nulla aëris ſit inertia fore, ut preſſiones aëris in *g* & *h* creſcant, quia his locis major nunc aëris quantitas ſupereminet quam antea; acceſſit nimirum pondus omnis aëris, qui ex A*g* & B*h* à calore fuit ſurſum propulſus. Atque ut hæc ſymbolis indicemus, faciemus pondus

dus columnæ A g, antequam novus caloris gradus ſuperveniret, $=$ A, alterius B b $= \alpha$, pondus columnæ g C $=$ B, columnæ b D $= \beta$: pondus columnæ A g rarefactæ $=$ C, pondus columnæ B b itidem rarefactæ $= \gamma$: altitudo mercurii in g ante expanſionem aëris A g & B b $= l$, altitudo ſimilis poſt iſtam expanſionem $= x$ & habebimus hanc analogiam
$B + \beta : l :: B + A - C + \beta + \alpha - \gamma : x$: unde eſt

$$x = \frac{B + A - C + \beta + \alpha - \gamma}{B + \beta} l.$$

Igitur aſcendet mercurius ab rarefacto aëre inferiore per altitudinem $x - l = \frac{A - C + \alpha - \gamma}{B + \beta} l =$ (poſitis omnibus in utroque tubo paribus) $\frac{A - C}{B} l$.

Refrigeſcente autem rurſus aëre in A g & B b iterum deſcendet mercurius in utroque barometro.

Notandum hic eſt, poſſe hoc modo à parvula caloris mutatione in A g atque B b notabilem oriri in barometro variationem ob inſignem aëris denſitatem in partibus inferioribus, qua fieri poteſt, ut in parte A g multo plus aëris contineatur (imo infinities, ſi aër vi infinita preſſus in infinitè parvum ſpatium condenſari ponatur) quam in reliqua g C, etiamſi longitudine infinita. Unde ſi pondus A admodum majus ſit pondere B, ſimulque manente cauſa aërem rarefaciente, pondus C datam ſervet rationem ad A, quod ita fere fit, apparet aſcenſum mercurii à minimo caloris gradu ſuperveniente in A g poſſe utcunque magnum eſſe.

Equidem ſi fingatur, partes A g & B b ſtrictiores admodum eſſe præ amplitudinibus in g C & b D, intelligitur variationes barometi ab aucto diminutove caloris gradu in A g & B b ita fieri minus notabiles, quia pondera A & α ipſaque C & γ prioribus proportionalia hoc modo decreſcunt; attamen variationes barometricæ, quæ ab hac cauſa proveniant, etiamnum utcunque magnæ concipi poterunt.

§. 20. Hæc dum ita perpenduntur, veriſimile fit variationes barometricas maxima parte petendas eſſe à celeribus caloris mutationibus in cryptis ſubterraneis. Multas eſſe eaſque permagnas hujuſmodi cryptas jam diu notum eſt: in terra etiam ſolida pori facere poſſunt quod cryptæ: ſi omnes cavitates (tum quæ à cavernis, tum quæ à poris aërem continentibus for-

mantur) ad altitudinem infra ſuperficiem terræ 20000. aut 30000. pedum colligas earumque capacitatem compares cum ſoliditate cruſtæ terreſtris ejuſdem altitudinis, hancque vel millies aut centies millies altera majorem ponas, erit profecto etiamnum ſufficiens cauſa iſta ad maximas barometri mutationes explicandas. Hæc ut puto ex præcedente paragrapho unicuique perſpicua erunt.

Cæterum loca quæ ſunt cryptis propiora, ea magis & ventis & barometri mutationibus erunt obnoxia, ob aëris ad motum inertiam, quæ fortaſſe ratio eſt, quod verſus æquatorem, ubi omnia fere pontus, minores variationes in barometro obſerventur quam in locis hiſce ſeptentrionalibus.

§. 21. Ex eodem fonte deducitur, aliquid etiam ad variationes barometricas conferre poſſe exhalationes aqueas ex terræ poris: ſed certe parum id erit: ſi enim tantum aquæ vapores ſuppeditarint, quantum maxima pluria decidere poteſt, vix inde unica linea mercurius aſcendet in barometro, præterquam quod hæc cauſa non ſit ita celeris, quin illius effectus in totam atmoſphæram ſimul fere diſtribuatur, atque ſic pro certo quodam loco totus evaneſcat. Si enim totam conſideramus Atmoſphæram, quæ terram ambit, animadverti certe non poterit eſſe eam vaporibus nunc minus nunc magis oneratam. Equidem rationem §. 20. expoſitam omnibus reliquis prætulerim, magnas enim & celeres in terræ viſceribus fieri poſſe mutationes indicant terræ motus, qui ſæpe ad centum usque milliaria eodem tempore ſentiuntur, & alia hujuscemodi phænomena.

Ad mutationes barometricas explicandas imprimis requiritur cauſa quædam ſubita; jam enim monui lentas in integram diſtribui aëris maſſam nulliusque eſſe effectus, idque demonſtravi §. 14. Atque hanc ob cauſam parvi faciendas eſſe mutationes, quæ immediate fiant in atmoſphæra ſupra terræ ſuperficiem.

§. 22. Et hæc videtur pariter cauſa quod luna, quæ tantæ eſt efficaciæ ad oceani aquas agitandas, nullum, qui obſervationibus diligentiſſimis obſervari potuerit, effectum exerat in barometrum: ſique cauſæ etiam reliquæ, quæ mutationem aliquam alicubi in Atmoſphæra producere valent paullatim agerent, foret procul dubio in omnibus locis à ſuperficie maris æque diſtantibus eadem conſtanter mercurii altitudo ad ſenſus. Hæc altitudo *media*

vocari

vocari poteſt & proxime determinabitur eo modo quo uſus eſt Joh. Jacobus Scheuchzer, obſervando quotidie altitudinem barometricam per longum temporis tractum ſumendoque inter omnes mediam.

Atque hâc circumſpectione uſus celeberrimus Auctor ex multis obſervationibus, quæ ad ipſum ex pluribus transmiſſæ fuerunt locis, poſuit altitudinem mediam.

Patavii - - - - - - 27 *poll.* $11\frac{1}{2}$ *lin. Pariſ.*
Pariſiis - - - - - - 27 *poll.* $9\frac{1}{2}$ *l.*
Turini - - - - - - 27 *poll.* $1\frac{1}{4}$ *l.*
Baſileæ - - - - - - 26 *poll.* $10\frac{1}{8}$ *l.*
Tiguri - - - - - - 26 *poll.* $6\frac{1}{2}$ *l.*
In monte Gothardi - 21 *poll.* $27\frac{1}{2}$ *l.*

§. 23. Diverſitates iſtarum altitudinum *mediarum* ab inæqualibus locorum ſupra mare elevationibus provenire notum eſt. Jam enim Paſcalii tempore experimenta ſumta fuere de deſcenſu mercurii in barometro ex loco profundiori in altiorem lato. Inde Philoſophi in mutuam cauſæ & effectus proportionem inquirere: Diverſæ in hanc rem variis auctoribus prodiere regulæ: Præcipua, cui etiamnum plurimi adhærent, hæc eſt, quod altitudines locorum proportionem ſequantur logarithmorum, qui altitudinibus barometri reſpondent. Fundata eſt hæc regula præcipue ſuper eo, quod denſitas aëris ubique proportionalis ſit ponderi aëris ſuperincumbentis: male autem hic applicatur iſtud principium, quod pro aëre ejuſdem caloris tantum valet, neque res certa eſt in omni altitudine aëris, quamvis in eadem columna verticali exiſtentis; ſi vero ita ſit, calorem æqualem eſſe, fatendum eſt, ſic ſatis recte regulam ſe habere.

At experimenta regulæ plane ſunt contraria; igitur non eſt ubiquè idem caloris gradus per totam columnæ aëreæ verticalis altitudinem, quod ut nunc planum faciam, apponam experimenta quædam accurate, ut mihi perſuadeo, inſtituta, ſed tamen, quod doleo, diverſis temporibus lociſque: magis utique inſtituto noſtro convenirent experimenta eodem tempore in eodemque monte, diverſis tantum altitudinibus, ſumta; talia autem, niſi pro mediocribus locorum altitudinibus, nulla adhuc quantum ſcio extant cum omnibus quæ ſcire oportet circumſtantiis. (I.)

(I) In altitudine 1070 *ped. Pariſ.* à ſuperficie maris barometrum deſcendit $16\frac{1}{5}$ *lin.* cum in ſuperficie maris altitudinem teneret 28 *poll.* $4\frac{2}{5}$ *lin.* (alii ponunt ſimpliciter 28 *poll.* in ſchedis autem quas D. De Lisle mecum communicavit habetur 28 *poll.* $4\frac{2}{5}$ *lin.*). Igitur poſita elaſticitate aëris in ſuperficie maris, uti deinceps ſemper ponam, $= 1$; inventa fuit elaſticitas in loco ſuperiori quam deſignabo per $E = 0,9520$.

(II) In altitudine à ſuperficie maris 1542 *ped. Pariſ.* deſcendit Mercurius in barometro $21\frac{1}{2}$ *lin.* qui in mari ad altitudinem 28 *poll.* 2 *lin.* ſuſpenſus hæſit: hic igitur fuit $E = 0,9364$.

(III) In altitudine montis Pici ſuper Inſula Teneriffa 13158 *ped. Pariſ.* à ſuperficie maris ſtetit mercurius ad altitudinem 17 *poll.* 5. *lin.* dum in ſuperficie maris teneret altit. 27 *poll.* 10 *lin.* unde eo in loco fuit $E = 0,6257$.

(IV) Si in minoribus altitudinibus accurate deſcenſus Mercurii obſerventur, reperitur deſcenſum unius lineæ reſpondere altitudini 65 aut 66 *ped.* Igitur in altitudine 65 *ped.* eſt $E = 0,9970$. Extant paſſim hæ obſervationes: tertiam autem habeo à D^no^. De Lisle fuitque à R. P. Feuillée inſtituta atque coram *Societate Reg. Scient. Pariſ.* prælecta: eſtque illa ſcopulus, ad quem omnes, quæ adhuc lucem aſpexerunt, theoriæ illidunt.

§. 24. Ut jam pateat, quouſque hæc cum poſitione logarithmicæ, ceu ſcalæ altitudinum elaſticitatibus reſpondentium conveniant, ponemus altitudinem loci à ſuperficie maris certo numero pedum Pariſinorum definiendam $= x$: elaterem aëris in ſuperficie maris deſignabimus per 1, & elaterem aëris in altitudine x ponemus $= E$. Notetur autem atmoſphæram nunc nobis conſiderari invariatam aut ſaltem ſibi conſtanter ſimilem, ita ut elateres aëris in ſuperficie maris & in altitudine quacunque x conſtantem ſervent rationem. Si enim admodum inæqualiter in diverſis atmoſphæræ altitudinibus, nulla ſervata proportione elateres inconſtantia temporis mutentur, ſane nulla excogitari poterit regula. His præmiſſis ponamus nunc æquationem $\alpha \log. E = x$ ubi coëfficiens α unica determinabitur obſervatione: utamur obſervatione prima & erit $\alpha \log. 0,9520 = 1070$, hincque α (ſecundum logarithmos Vlacquianos) $= -50194$. Igitur pro hoc negotio, ſi logarithmica ſatisfacere debeat, ponendum eſſet $-50194 \log. E = x$, ſive $\log. \frac{1}{E} = \frac{x}{50194}$: Ad

hujus

hujus autem æquationis normam, ſi ponatur pro ſecunda obſervatione $x = 1542$, invenitur $E = 0, 9317$, ipſa autem obſervatio indicat $E = 0, 9364$: differentia inter hypotheſin & obſervationem eſt plus quam ſeſquilineæ, quæ ſane notabilis eſt reſpectu habito ad differentiam parvam altitudinum verticalium.

Si jam porro pro tertia obſervatione ponatur $x = 13158$, fit ex hypotheſi $E = 0, 5469$, dum experimentum indicavit $E = 0, 6257$: quæ differentia nimia eſt, quam ut ullo modo logarithmica ſervari poſſit: valet enim hæc differentia plus quam duos pollices cum duabus lineis.

§. 25. Rejecta logarithmica conſequens eſt elaſticitates in diverſis atmoſphæræ altitudinibus nequaquam eſſe denſitatibus proportionales, aut quod eodem recidit, diverſum eſſe in diverſis altitudinibus medium caloris gradum. Aliæ igitur ab aliis, quibus defectus iſte probe fuit notatus, fuerunt excogitatæ regulæ: earum tamen nulla ad experimentum III. (§. 23.) ſatis accommodata dici poteſt. Veram, quam natura ſequatur, legem invenire, rem eſſe puto vix ſperandam: quis enim aliter quam levibus conjecturis aſſequetur] rationem velocitatum mediarum in particulis aëreis: Incidi tamen forte in aliquam hypotheſin, quæ phænomenis non male reſpondet: prius autem pro quacunque velocitatum lege curvam dabo, quam ad ſpecialem iſtam hypotheſin deſcendam.

§. 26. Sit linea verticalis AD (Fig. 59.); QF horizontalis radat ſuperficiem maris: Denotet BF velocitatem mediam particularum aërearum in ſuperficie maris: BM denſitatem mediam & BQ elaſticitatem, quæ in omni loco æque alto eadem eſt. Deinde per puncta F, M, Q ductæ concipiantur curvæ EFH, LMO, PQS ceu ſcalæ, quæ in omnibus altitudinibus, veluti BC, applicatis CG, CN, CR denotent velocitates medias particularum aërearum, denſitates medias & elaſticitates medias. Datis nunc duabus curvis tertiam licet determinare ex eo, quod elaſticitates (ceu experientia docuit & §. §. 3. 4 5. & 6. explicatum fuit) ſint proxime in ratione compoſita ex quadrato velocitatum modo dictarum & ſimplici denſitatum. Fig. 59.

Ipſe quidem monui prædicto loco hanc proportionem non poſſe exacte eſſe veram, quia aër quidem elaterem poteſt habere infinitum ſeu vi infinita comprimi, non poteſt autem in ſpatium plane infinite parvum condenſari

ſari: quia tamen in aëre qui ſit naturali vel quadruplo denſior, hæc proprietas, *quod nempe elaſticitates ſint in ratione compoſita ex quadrato velocitatum particularum & ſimplici denſitatum* experimentis etiamnum ad ſenſus omnino reſpondere viſa fuit, illa ſine ullo ſenſibili errore uti poterimus pro aëre naturali atmoſphæræ mari incumbentis, ſiquidem eo accuratius vera ſit quo rarior eſt aër.

His ad calculum præparatis ponemus $BF = a$, $BM = b$, $BQ = c$, $BC = x$, $Cc = dx$; $CG = v$, $CN = z$, $CR = y$, & erit $y : c = vvz : aab$ ſeu $y = \frac{cvvz}{aab}$. Quia porro elaſticitatis menſura eſt pondus ſuperincumbentis aëris, erit $qR\,(-dy) =$ ponderi ſtrati aërei intercepti inter C & c, quod proportionale eſt aëris denſitati z & altitudini ſtrati dx: eſt igitur $-dy = \frac{zdx}{n}$ ſeu $z = \frac{-ndy}{dx}$, quo valore ſubſtituto in æquatione $\left(y = \frac{cvvz}{aab}\right)$ habetur $y = \frac{cvv}{aab} \times \frac{-ndy}{dx}$ vel

$$-\frac{dy}{y} = \frac{aabdx}{ncvv}.$$

§. 27. Si ponatur velocitas particularum aërearum in omni altitudine eadem, nempe $= a$, fiet $\frac{-dy}{y} = \frac{bdx}{nc}$, vel, facta debita integratione, $log. \frac{c}{y} = \frac{bx}{nc}$; Iſtam vero hypotheſin non ſatis experimentis confirmari vidimus §. 24. Igitur alia tentata, poſui $v = \sqrt{(aa + mx)}$ vel $vv = aa + mx$, quæ lex eſt in motibus corporum libere cadentium: neque id ſine ſucceſſu; ita vero fit

$$\frac{-dy}{y} = \frac{aabdx}{naac + mncx}$$

$$\text{vel } log. \frac{c}{y} = \frac{aab}{mnc}\, log. \frac{aa + mx}{aa}.$$

In hac æquatione paullo generaliori in qua m & n etiamnum arbitrariæ ſunt, porro periculum feci, num non poſſet poni $\frac{aab}{mnc} = 1$, atque id etiam apte fieri vidi: ſic vero obtinui

$$log. \frac{c}{y} = log. \frac{aa + mx}{aa} \text{ vel } \frac{c}{y} = \frac{aa + mx}{aa} \text{ aut } \frac{y}{c} = \frac{aa}{aa + mx}.$$

In-

Indicat iſta hypotheſis eſſe elaſticitates aeris ubique in ratione reciproca quadrata velocitatum, quibus particulæ aëreæ agitantur, ſive eſſe CR ad BQ ut BF^2 ad CG^2, atque cum BFH ex hypotheſi parabola eſt ſuper axe AD verticem habens infra punctum B ad diſtantiam $\frac{aa}{m}$, ſequitur eſſe curvam PQS hyperbolam; Dictam vero diſtantiam $\frac{aa}{m}$ ſumendam eſſe $= 22000$ pedum animadverti, ut obſervationibus §. 23. proxime ſatisfiat. Inde talis jam prodit æquatio ſpecifica

$$\frac{y}{c} = \frac{22000}{22000+x}.$$

Pro curva vero LMO invenitur $\frac{z}{b} =$ (per §. 26.) $\frac{aay}{cvv}$, ſeu (quia $\frac{aa}{vv} = \frac{22000}{22000+x} = \frac{y}{c}$) prodit poſt hanc ſubſtitutionem

$$\frac{z}{b} = \left(\frac{22000}{22000+x}\right)^2.$$

§. 28. Ut appareat, quousque hypotheſis noſtra conveniat cum experimentis §. 23. ponemus in æquatione pro elaſticitatibus ſucceſſive pro x, 1070; 1542; 13158, & 65; ita invenitur *reſpective* $\frac{y}{c} = 0,9536$; $\frac{y}{c} = 0,9345$; $\frac{y}{c} = 0,6257$, atque $\frac{y}{c} = 0,99705$: obſervationes autem indicant $\frac{y}{c} = 0,9520$; $\frac{y}{c} = 0,9364$; $\frac{y}{c} = 0,6257$, atque $\frac{y}{c} = 0,9970$. Obſervatio tertia aliis hypotheſibus inimiciſſima cum noſtra plane conſpirat, nec reliquæ plusquam 0,0019 particulis diſſentiunt, quæ in altitudine barometri tres quintas unius lineæ partes valent. Nemo autem qui expertus fuerit, quam vagæ & parum inter ſe conſentientes fuerint obſervationes barometricæ, tantillam differentiam admodum curabit. Ipſe interim hanc rem non aliter quam hypotheſin precariam conſidero, neque aliam ob cauſam calculum §. §. 26. & 27. præmiſi, quam ut rationem darem, quâ fieri poſſit ut altitudines verticales non reſpondeant logarithmis altitudinum barometricarum, prouti deberet fieri, ſi per totam atmoſphæram uniformis eſſet calor: inſtituto enim calculo factaque comparatione ejus cum experimentis mihi videre viſus ſum, non poſſe rem hanc à

diverſa particularum aërearum gravitatione in diverſis à centro terræ diſtantiis ſufficienter explicari, prouti Newtonus tentavit ſtatuendo gravitationes harum particularum decreſcere in ratione quadrata diſtantiarum à centro terræ, quæ hypotheſis in altitudinibus 13000 pedes *Pariſ.* non excurrentibus ſenſibilem differentiam non efficit ab hypotheſi uniformis gravitationis. Similiter ego aliquando incidi in opinionem auctam vim centrifugam particularum aërearum in majoribus altitudinibus aliquid hic contribuere poſſe; at pariter inſtituto calculo opinioni huic non amplius adhæſi. Interim non puto, abſurdum eſſe, ſi dicamus calorem aëris medium eo majorem eſſe, quo magis à ſuperficie maris diſtet. Velim autem ut probe notetur, hic ſermonem eſſe de calore *medio* in libera atmoſphæra: ſic enim fieri poteſt, ut calor realis quidem in montibus non creſcat ex cauſis aliis, nec tamen inde hypotheſis evertatur, quandoquidem §. §. 15. & 16. jam demonſtratum fuerit, pondus columnæ mercurii in barometro non præciſe cenſendum eſſe æquale ponderi columnæ aëreæ in illa regione ſumtæ, ſed ponderi medio omnium columnarum terræ inſiſtentium: De diverſis denſitatibus itaque ſic ſentio.

§. 29. Si æqualis eſſet ubique calor, forent utique denſitates elaſticitatibus ad ſenſus proportionales, reſponderentque altitudines verticales logarithmis altitudinum barometricarum: At vero id experimentis repugnare pono: neque tamen crediderim in duobus locis parum à ſe invicem diſſitis notabilem intercedere poſſe caloris differentiam, quia calor in corpore rariore ut eſt aër, mox uniformiter diſtribuitur, niſi perpetua adſit cauſa, quæ aërem vicinum calefaciat.

Alia autem res eſt in locis remotioribus, nec enim abſurdum puto aërem vel decies denſiorem ſtatuere ſub polis, quam ſub æquatore, ſi modo aër utrobique accipiatur ſuperficiei terræ proximus; at in magnis altitudinibus minor utique erit differentia inter denſitatem aëris qui polis & ejus qui æquatori reſpondet cæteris paribus, & propterea inæqualiter admodum decreſcent à ſuperficie terræ denſitates aëris & multo magis decreſcent ſub polis quam ſub æquatore: hoc igitur modo fieri poſſet, ut ſub polis denſitates aëris reales in parvis altitudinibus v. gr. decreſcant in ratione ut $(22000+x)^4$ ad 22000^4 ob auctum calorem, & ſub æquatore vix ſenſibiliter decreſcant, ob diminutum calorem, quæ caloris diminutio prope æquatorem con-

confirmatur ex eo quod culmen montis Pici per decem fere menſium ſpatium ſit nive obtectum, dum in ipſa Teneriffæ inſula nunquam ut ferunt ningit. Igitur non abſurde denſitates mediæ cenſeri poſſunt diminui in ratione ut $(22000+x)^2$ ad 22000^2, ut §. 27. aſſumtum fuit; dum elaſticitates ubique decreſcant in ratione ut $22000+x$ ad 22000; neque enim hæ in iisdem à ſuperficie terræ altitudinibus differre poſſunt, niſi à cauſis fortuito ſupervenientibus & parum durantibus.

§. 30. In terris, quæ intra quadrageſimum & ſexageſimum latitudinis gradum continentur, probabile eſt denſitates in eadem proxime ratione decreſcere qua elaſticitates; hancque ob rationem volui periculum facere, quænam inde refractionum theoria oriatur, qua de re nunc quædam adjiciam.

Digreſsio de refractione radiorum per atmoſphæram tranſeuntium.

(α) Proprietas eſt notiſſima radiorum ex uno medio in aliud incidentium eaque innumeris experimentis confirmata, quod angulus incidentiæ ad angulum refractionis conſtantem ſervat rationem: præterea etiam patet, ſi refractio fiat infinite parva, id eſt, ſi differentia utriusque ſinus rationem habeat infinite parvam ad alterutrum ſinum, fore ut ſinus anguli, qui intercipitur inter radium incidentiæ prolongatum & radium refractum, eandem habeat rationem ad ſinum totum, quam habet differentia ſinuum angulorum incidentiæ & refractionis ad coſinum anguli incidentiæ. Illum vero, quem modo allegavi, angulum interceptum inter radium incidentiæ prolongatum & radium refractum, deinceps vocabo *angulum refractionis differentialem*. Exinde ſequitur, quod ſit cæteris paribus ſinus *anguli refractionis differentialis* proportionalis ſinui anguli incidentiæ diviſo per coſinum ejusdem anguli.

(β) Experimenta porro docent, ſi radius ex aëre in aërem diverſæ ab altero denſitatis incidat, eſſe *angulum refractionis differentialem* cæteris paribus differentiæ denſitatum proportionalem.

Experimenta autem hanc in rem, quantum fieri poteſt, ſumta fuerunt à D. Hauksbée, accuratiſſime, tum de aëre admodum condenſato, tum

etiam de aëre rariſſimo, qui tandem pro nullo haberi poterat: modus quo inſtituta fuerunt deſcribitur in *transactionibus Anglicanis*: Succeſſus autem omnium experimentorum huc redit, ut arguant fuiſſe ſinum *anguli refractionis differentialis* ad ſinum totum ut 5 $\frac{1}{8}$ pollices ad 2588. pedes, cum radius incideret ex aëre naturali in ſpatium ab aëre vacuum ſub angulo triginta duorum graduum, id eſt, ut 1 ad 6060 & iisdem poſitis, mutato angulo triginta duorum graduum in ſemirectum, ut 1 ad 3787 (per §. α). Inde deducitur, ſi radius ex *aëre naturali* in vacuum ſub angulo quocunque incidat, eſſe ſinum anguli incidentiæ ad ſinum anguli refractionis ut 3787 ad 3786.

Neutonus loco hujus rationis aſſumit in *tract.* ſuo *optico* illam, quæ eſt inter 3201 & 3200, eamque deducit ex refractionum quantitate ab Aſtronomis obſervata: ſtatuit autem quantitatem refractionis eandem eſſe, ſi ſtrata radium refringentia ſint parallela, in quacunque cæterum ratione denſitates medii decreſcant, ſi modo in primo & ultimo ſtrato denſitatum differentia eadem maneat (vid. *Neut. tract. opt. pag.* 321. *edit. gall.*). De reliquo ſub diverſis circumſtantiis non poteſt non admodum eſſe variabilis refractio, quod aër, quem vocamus naturalem, multis mutationibus ſit obnoxius, tum à calore & frigore, tum à preſſione atmoſphæræ, quæ ambo concurrunt ad denſitatem aëris formandam, cui denſitati refractiones radiorum in vacuum incidentium ſunt proportionales cæteris paribus. Eadem etiam monuit D. Hauksbée in recenſione experimentorum, quæ modo allegavimus, eamque ob rationem ſtatum aëris, qui erat, cum experimenta ſumeret, probe definivit.

Fig. 60. (γ) Fuerit nunc AC (Fig. 60.) arcus circuli terreſtris centro B ductus, in cujus plano radius luminis AG eſt: erit autem iſte radius incurvatus AG ejus indolis, ut convergat ad aſymptoton, huicque aſymptotæ parallela putetur AH; ducatur horizontalis AE, rectaque AF quæ tangat in A curvam AG. Ita videmus fore angulum HAE menſuram altitudinis aſtri veræ, & angulum FAE menſuram altitudinis apparentis, angulumque FAH fore angulum refractionis: eſt autem angulus FAH idem quod ſumma omnium *angulorum refractionis differentialium*, ſeu angulorum contactus qualis eſt angulus *cbo*.

Conſiderentur duo elementa curvæ *ab*, *bo*, & per puncta *a*, *b*, *o*, ducti inteligantur centro communi B arcus $\alpha\alpha$, $\beta\beta$, $\gamma\gamma$: ſitque denſitas aëris

aëris $\alpha\alpha\beta\beta = D$; denſitas aëris $\beta\beta\gamma\gamma = D - dD$, erit (per §. §. α, β) ſinus anguli contactus in b diviſus per ſinum totum, ſeu ipſe angulus contactus proportionalis differentiæ denſitatum dD multiplicatæ per rationem ſinuum angulorum incidentiæ & refractionis, id eſt, multiplicatæ per $\frac{be}{eo}$. Si vero ducatur B D perpendicularis ad F A productam, perſpicuum eſt, vix differre $\frac{be}{eo}$ & $\frac{BD}{Do}$, ideo quod radius fere ſit rectus ſicque poſſit triangulum B D o pro rectilineo haberi & ſimili cum triangulo beo. Igitur erit angulus quæſitus F A H proportionalis $\int \frac{BD}{Do} \times dD$.

(δ) Hiſce veſtigiis inſiſtendo ponendoque eſſe ubique denſitatem $D = \frac{22000}{22000 + x} G$, ubi x exprimit lineam na numero pedum Pariſinorum & G denotat denſitatem aëris in loco obſervationis, inveni quod ſequitur. Sit ſinus altitudinis aſtri apparentis $= f$, coſinus $= F$, radius terræ $= r$ numero pedum Pariſinorum exprimendus: indicetur numerus 22000 per a: ponatur porro ſinus totus $= 1$, *angulus refractionis differentialis* pro radio ex aëre naturali in vacuum ſub angulo ſemirecto incidentis $= g$: Denique brevitatis ergo fiat $2r - 2a = \alpha$; $-FFrr + 2ar - aa = \beta$: & erit β aut numerus affirmativus aut negativus; affirmativus erit, ſi altitudo apparens ſideris parva fuerit & quidem infra 2°, 44′: ſecus erit negativus: In priori caſu obtinebitur angulus quæſitus F A H hunc in modum: Fiat nempe ſemicirculus M L F (Fig. 61.) cujus radius A M $= 1$: ſumatur A C $= \frac{\alpha}{2fr}$; Fig. 61. A B $= \frac{2\beta - \alpha a}{2afr}$, ducanturque C D, B T ad M C perpendiculares & erit angulus F A H $= \frac{-fFrr}{2\beta} g + \frac{far}{\beta} g + \frac{far\alpha \times DT}{2\beta\sqrt{\beta}} g$.

In caſu, quo β eſt negativus, erit idem angulus

$$FAH = \frac{-far}{\beta} g + \frac{fFrr}{\beta} g + \frac{far\alpha}{2\beta\sqrt{\beta}} g \times log. \frac{(\alpha - 2\sqrt{\beta}) \times (Fr - a + \sqrt{\beta})}{(\alpha + 2\sqrt{\beta}) \times (Fr - a - \sqrt{\beta})}.$$

(ϵ) Secundum iſtas hypotheſes ponendo pro radio terræ 19600000, poterit pro omni altitudine ſideris apparentis ejus determinari refractio aſtronomica, ſi bene experimento inventus fuerit valor anguli g: quia vero difficile admodum eſt hunc valorem cum ſufficiente accuratione definire, conſultius erit

erit in caſu aliquo particulari aſtronomice refractionem definire, & ex hoc reliquos calculo ſubducere. Aſſumamus v. gr. in altitudine decem graduum refractionem eſſe 5 *min.* 28 *ſec.* cui hypotheſi plerique Aſtronomi Pariſiis adhærent. Inveniemus hancce refractionis tabulam.

altit. ſid. appar.	refract.		altit. ſid. appar.	refract.	
0 *grad.*	34 *min.*	53 *ſec.*	50 *grad.*	0 *min.*	53 *ſec.*
5	9 - - - -	59 - -	55	- - - - -	$44\frac{1}{5}$
10	5 - - - -	28 - -	60	- - - - -	$36\frac{1}{2}$
15	3 - - - -	44 - -	65	- - - - -	$29\frac{1}{2}$
20	2 - - - -	52 - -	70	- - - - -	23
25	2 - - - -	12 - -	75	- - - - -	17
30	1 - - - -	47 - -	80	- - - - -	$11\frac{1}{4}$
35	1 - - - -	29 - -	85	- - - - - -	$5\frac{1}{2}$
40	1 - - - -	15 - -	90	- - - - - -	0.
45	1 - - - -	3 - -			

Quia vero refractiones ſequuntur rationem litteræ *g*, id eſt, *anguli refractionis differentialis* radii ſub angulo ſemirecto ex aëre naturali in vacuum incidentis & quia iſte angulus proportionalis eſt denſitati aëris naturalis, ſeu aëris, quem obſervator reſpirat, patet ſi vel aër conſtanter ſimiliter vaporibus eſſet oneratus (à quibus animum adhuc abſtraximus) non poſſe tamen fieri, quin refractiones aſtronomicæ ſint admodum variabiles. Majores nempe erunt in ſuperficie maris quam in montibus, eritque notabilis differentia vel in mediocribus montium altitudinibus: majores præterea erunt tempore frigido quam calido, hæcque ſola cauſa in hiſce terris refractiones minimum quarta parte augere poteſt: denique majores etiam erunt refractiones barometro alto quam humili. Poterunt autem ſi vapores nullo ſint obſtaculo, refractiones omni tempore recte definiri, ſi inſtrumentum, quod §. 9. deſcriptum fuit quodque Fig. 57. repræſentat ſimul adhibeatur cum barometro; ſi enim altitudinem mercurii in barometro dividas per altitudinem mercurii in altero inſtrumento, habebis denſitatem aëris, cui cæteris paribus refractio proportionalis eſt facienda. Neque dubito, quin refractio ſolis minor ſit refractionibus reliquorum ſiderum, quod calor ſolis aërem non mediocriter expandit aëriſque denſitatem diminuit.

§. 31.

§. 31. Ex iis quæ de agitatione particularum aërearum, à quâ utique calor aëris pendet, præſertim vero, quæ §. 10. monita fuerunt, apparet gradum eundem caloris aëri ineſſe, quoties eadem ratio intercedit inter ejus elaſticitatem atque denſitatem; elaſticitatem indicat barometrum; denſitatem concludimus ex gravitate aëris ſpecifica; atque inde ut vidimus §. 10, gradus obtineri poterit caloris fixus, ſi aquæ bullientis calor incertus videatur, prouti D°. Fahrenheid obſervatus fuit pendere à pondere atmoſphæræ incumbentis. Inſtrumenta quæ ſingulis momentis denſitatem aëris indicant facile excogitari poſſunt atque à multis deſcripta fuerunt.

Notandum hic eſt rationem illam modo dictam inter aëris elaſticitatem ejuſque denſitatem ſimul exhibere altitudinem aëris homogenei, & quia nobis deinceps ſermo erit de iſta altitudine, convenit illam recte prius definire, quam ad alia pergamus.

§. 32. Si fingamus columnam aëream verticalem uniformis denſitatis & cum mercurio barometri ad æquilibrium compoſitam, erit altitudo illius columnæ *altitudo* quam voco *aëris homogenei* pro data denſitate.

Et quia aëris mediocriter denſi gravitas ſpecifica eſt ad gravitatem ſpecificam mercurii ut 1 ad 11000 ipſaque altitudo media mercurii in barometro pro locis parum à ſuperficie maris elevatis ſit $2\frac{1}{3}$ ped. *Pariſ.* erit altitudo aëris homogenei mediocriter denſi 25666 pedum.

Patet ex iſta definitione altitudines illas, de quibus nunc dicimus, eo minores eſſe, quo denſior eſt aër, cui altitudo reſpondere debet, & quo minor eſt altitudo mercurii in barometro. Igitur ſi idem ſit caloris gradus in montibus & in ſuperficie maris, eadem quoque erit utrobique altitudo aëris homogenei, quia pro eodem caloris gradu aëris denſitas rationem ſequitur aëris elaſticitatis ſeu altitudinis mercurii in barometro. Apparet porro altitudinem aëris homogenei in ſuperficie maris admodum decreſcere ab æquatore verſus polos, quia frigus intenditur denſitaſque aëris augetur manente elaſticitate & in iiſdem regionibus minorem eſſe tempore hyemali quam æſtivo.

§. 33. Multa ſunt quæ ad motum aëris definiendum pertinent, quorum ſolutio pendet ab altitudine aëris homogenei: Inter hæc etiam eſt propagatio ſoni ejuſque celeritas: Quamvis enim celeritas ſoni diverſimode definiatur

niatur à diverſis, quos concipere poſſumus de ejus propagatione modis ita, ut nunc videatur celeritatem eam eſſe quæ debeatur altitudini aëris homogenei, nunc quæ dimidiæ altitudini reſpondeat, aut etiam dimidiæ altitudini multiplicatæ per rationem quadrati circulo circumſcripti ad aream circuli, omnes tamen opiniones in eo conveniunt, quod celeritas ſoni proportionalis ſit radici altitudinis aëris homogenei cum eo, in quo propagatur. Si ita ſe res habeat, celerius propagatur ſonus in aëre calido quam frigido, barometro alto quam humili, (nihil dicam de ventis ſecundis aut contrariis); multa in hanc rem partim in Italia partim in Anglia ſumta fuerunt experimenta, hæcque poſteriora docuerunt celeritatem ſoni mediam reſpondere 1140 ped. *Angl.* intra minutum ſecundum perficiendis. At quia in uno eodemque loco variabilis eſt altitudo atmoſphæræ homogeneæ nominatimque hic locorum excurrit à mutationibus barometricis junctis cum mutationibus caloris à 3 uſque ad 4, variabilis erit ubique celeritas ſoni, ſi vel nihil mutent venti, eaque celeritas in hiſce terris continebitur intra terminos $\sqrt{3}$ & $\sqrt{4}$, ſeu 173 & 200.

§. 34. Venio jam ad varias quæ fingi poſſunt de motu aëris quæſtiones ſolvendas ſimiles illis, quas de motu fluidorum non elaſticorum in præcedentibus habuimus.

Problema.

Sit motus definiendus aëris ex vaſe per foramen exiguum erumpentis in ſpatium infinitum ab aëre vacuum.

Solutio.

Apparet ex natura quæſtionis inſenſibilem eſſe motum localem aëris interni quo ſeſe expandit, dum certa ſui quantitas per foramen erumpit: Igitur hic ſolus *aſcenſus potentialis*, quem particula aërea, dum expellitur, acquirit conſiderandus eſt, atque comparandus cum *deſcenſu actuali* vel potius cum diminutione elaſticitatis, quam aër internus habet. Ut vero totam rem ad methodum noſtram pro fluidis non elaſticis adhibitam reducamus, conſiderabimus cylindrum verticalem communis cum vaſe propoſito amplitudinis atque tantæ altitudinis, quanta eſt altitudo aëris homogenei cum aëre interno, is vero cylindrus, ſi ſimili aëre plenus cenſeatur, ſed non elaſtico, eadem velocitate

tatè ſuo pondere aërem infimum expellet per foramen, qua aër in vaſe propoſito ſua elaſticitate ſe ipſum expellit. In priori autem caſu ejicitur velocitate quæ debetur ipſi altitudini cylindri, ergo & in poſteriori. Notandum autem eſt, altitudinem quam pro cylindro finximus, perpetuo eandem eſſe, quia aëris elaſticitas & denſitas in eadem ratione diminuuntur, calorem autem non mutari ponimus. Igitur ſi altitudo aëris homogenei (quæ à calore aëris interni pendet) dicatur A, effluet aër conſtanter velocitate $\sqrt{A}$. Nec tamen, quod calculus oſtendit, vas ipſum unquam evacuatur, quia aër effluens fit continue rarior, quod ut æquatione comprehendamus, ponemus denſitatem ſeu quantitatem aëris à fluxus initio $= 1$; denſitatem ſeu quantitatem aëris poſt definitum tempus reſidui $= x$, tempusque ipſum $= t$, erit, quia velocitas conſtans eſt, $-dx = axdt$, ubi per a intelligitur quantitas conſtans definienda ex magnitudine vaſis, amplitudine foraminis & altitudine A: hinc $\frac{-dx}{x} = adt$ & $log. \frac{1}{x} = at$. reperitur autem valor coëfficientis a hoc modo. Quia poſitum à nobis fuit $-dx = axdt$; erit ab initio effluxus $-dx = adt$. Jam mutetur elementum primum $(-dx)$ in cylindrum foramini ceu baſi ſuperinſtructum; erit autem altitudo iſtius cylindruli $= -Ldx$, ſi L ſit altitudo cylindri ſuper eodem foramine extructi & communem cum vaſe propoſito capacitatem habentis: hæc porro longitudo $-Ldx$ illa eſt, quæ tempuſculo dt percurritur, & quia poni ſolet tempuſculum æquale ſpatio percurſo diviſo per velocitatem, erit hic $dt = \frac{-Ldx}{\sqrt{A}}$; ſubſtituatur iſte valor in æquatione $-dx = adt$ & habebitur $-dx = \frac{-aLdx}{\sqrt{A}}$, ſive $a = \frac{\sqrt{A}}{L}$. Eſt proinde æquatio finalis hæc:

$$log. \frac{1}{x} = \frac{t\sqrt{A}}{L}.$$

Si tempus exprimere lubeat per certum minutorum ſecundorum numerum, quem vocabimus n, & intelligatur per s ſpatium quod mobile abſolvit cadendo libere à quiete intra unum minutum ſecundum, erit ponendum $t = 2n\sqrt{s}$, ſicque fiet

$$log. \frac{1}{x} = \frac{2n\sqrt{As}}{L}.$$

Problema.

§. 35. Quæritur motus aëris denſioris in aërem externum rariorem infinitum ex vaſe per foramen valde parvum erumpentis, poſito in utroque aëre eodem caloris gradu.

Solutio.

Sit denſitas aëris interni initialis $= D$; denſitas aëris externi $= \delta$: denſitas aëris interni poſt datum tempus t reſidui $= x$, altitudo aëris homogenei, (ſive ratione aëris interni ſive externi, nec enim diverſa eſſe poteſt, ſi uterque aër eodem calore præditus ſit, ſicque denſitates & elaſticitates in pari ratione decreſcant) $= A$. Quæratur ubique altitudo aëris homogenei, qui habeat eandem preſſionem ſeu elaterem cum aëre externo & cujus denſitas eadem ſit cum aëre interno: hæc altitudo ab initio erit $\frac{\delta A}{D}$, & poſt tempus t erit $\frac{\delta A}{x}$. Patet autem velocitatem aëris erumpentis talem ubique fore, quæ reſpondeat differentiæ definitarum altitudinum A & $\frac{\delta A}{x}$; eſt itaque poſt tempus t velocitas aëris erumpentis $= \sqrt{\left(A - \frac{\delta A}{x}\right)}$.

Sunt porro decrementa denſitatum $(-dx)$ proportionalia quantitatibus aëris erumpentis, quæ rationem habent compoſitam ex velocitate $\left(\sqrt{\left(A - \frac{\delta A}{x}\right)}\right)$ ex denſitate (x) & ex tempuſculo (dt): ſic igitur eſt $-dx = a\left(\sqrt{\left(A - \frac{\delta A}{x}\right)}\right) x\,dt$, ubi a eſt numerus conſtans qui per methodum præcedentis paragraphi fit $= \frac{1}{L}$, retenta ſignificatione hujus litteræ ibidem adhibita; hocque valore ſubſtituto oritur

$$-dx = \frac{dt}{L} \times \sqrt{(Axx - \delta A x)} \text{ ſeu } \frac{-dx}{\sqrt{(xx - \delta x)}} = \frac{dt\sqrt{A}}{L}:$$

Factaque debita integratione fit:

$$\log. \frac{[\sqrt{x} - \sqrt{(x-\delta)}] \times [\sqrt{D} + \sqrt{(D-\delta)}]}{[\sqrt{x} + \sqrt{(x-\delta)}] \times [\sqrt{D} - \sqrt{(D-\delta)}]} = \frac{t\sqrt{A}}{L},$$ aut poſito rurſus, ut in præcedente paragragho, $t = 2n\sqrt{s}$, erit

log.

$$\log. \frac{[\sqrt{x} - \sqrt{(x-\delta)}] \times [\sqrt{D} + \sqrt{(D-\delta)}]}{[\sqrt{x} + \sqrt{(x-\delta)}] \times [\sqrt{D} - \sqrt{(D-\delta)}]} = \frac{2n\sqrt{As}}{L}$$

Corollarium 1.

§. 36. Omnis effluxus fit tempore finito quâ in re iſta quæſtio ab altera præcedente differt : Ceſſat autem aër effluere, cum eſt $x = \delta$, & tunc fit

$$n = \frac{L}{2\sqrt{As}} \times \log. \frac{\sqrt{D} + \sqrt{(D-\delta)}}{\sqrt{D} - \sqrt{(D-\delta)}}.$$

Sit v. gr. A = 26000 *ped. Paris.* contineat vas propoſitum unum pedem cubicum, foramen autem habeat amplitudinem unius lineæ quadratæ, erit L = 20736 ; ponatur inſuper aërem internum ab initio duplo fuiſſe denſiorem externo ; eſt autem ut conſtat $s = 15\frac{1}{12}$ *ped. Paris.* Fiet igitur

$$n = \frac{20736\sqrt{3}}{\sqrt{(181.26000)}} \log. \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = 29, 2,$$

quod ſignificat aërem utrumque ad æquilibrium compoſitum iri tempore paullo majori quam viginti novem minutorum ſecundorum, poſt idque omnem effluxum ceſſaturum. Fieri autem poteſt à contractione, quam fluida præ foramine patiuntur (*vid. ſect. IV.*) & ad quam nullam fecimus in computo attentionem, ut tempus iſtud augeatur fere in in ratione ut 1 ad $\sqrt{2}$.

Corollarium 2.

§. 37. Si fingatur aërem non immediate per foramen effluere, ſed per longum tubum, non mutabitur propterea velocitas, ſi modo totius tubi capacitas ſit veluti infinite parva ratione capacitatis, quæ in vaſe ipſo eſt; Videtur autem denſitatem aëris, quamdiu in tubo eſt, eandem eſſe cum denſitate aëris vaſi incluſi, nec tamen, quod demonſtrabo inferius, elaſticitas aëris in tubo major eſt elaſticitate aëris externi, qui tubum circumdat. Conſequens inde eſt, ventum aërem eſſe denſiorem aëre quieſcente, ſed non magis elaſticum; attamen denſitatum differentia parvula quoque erit ; ventus enim, qui vel 30. pedes ſingulis minutis ſecundis conficit, aërem vicinum, æque calidum & quietum, vix una milleſima ſeptingentiſſima parte denſitate ſuperabit.

Problema.

§. 38. Definire influxum aëris per foramen valde parvum in vas aëre rariore plenum, poſito rurſus utrobique eodem caloris gradu.

 Solu-

Solutio.

Fuerit vas ab initio omnino vacuum, & poſt tempus t ponatur denſitas aëris interni $= x$; ſic reperietur iiſdem fere veſtigiis inſiſtendo, quibus in trigeſimo quinto paragrapho uſi ſumus retentisque iisdem denominationibus

$$\frac{dx}{\sqrt{(\delta - x)}} = \frac{dt\sqrt{AD}}{L} \text{ ſive } t = 2n\sqrt{s} = \frac{2L}{\sqrt{.A}} - \frac{2L\sqrt{(D-x)}}{\sqrt{AD}}.$$

Numerus igitur minutorum ſecundorum, quo totum vas impletur, donec inter utrumque aërem æquilibrium ſit exprimitur per $\frac{L}{\sqrt{As}}$: & eſt tempus repletionis duplum illius quo repleretur ſi velocitate initiali conſtanter influeret aër. In caſu quo capacitas vaſis pedem cubicum continet & foramen lineam quadratam æquat, ſit repletio tempore propemodum triginta trium minutorum ſecundorum, niſi contractione venæ aëreæ influentis repletio retardetur.

§. 39. Expoſuimus varias fluidorum elaſticorum ſive motorum ſive quieſcentium proprietates: Unum ſupereſt non omittendum, quo fluida elaſtica differunt à non-elaſticis, hoc ſcilicet, quod fluido elaſtico vel quieſcenti *vis viva* inſita ſit, non quod inſtar aliorum corporum motorum ſe ad certam altitudinem elevare poſſit, neque enim motum localem in illo hic conſideramus, ſed quod elatere ſuo talem aſcenſum in aliis corporibus gravibus generare poſſit. Licebit autem, quod ſpero, in ſequentibus uti vocabulo *vis vivæ corpori elaſtico compreſſo inſitæ*, quando nihil aliud eo intelligitur quam *aſcenſus potentialis*, quem corpus elaſticum aliis corporibus communicare poteſt priuſquam totam ſuam vim elaſticam perdiderit.

Meretur hic in anteceſſum notari, quod ſicut deſcenſus corporis dati per datam altitudinem, utcunque fiat, eandem conſtanter vim vivam in corpore producit, ita quoque elaſtrum ſive fluidum elaſticum poſtquam à dato tenſionis ſeu condenſationis gradu ad datum alium gradum fuit reductum utcunque, id ſemper eandem vim vivam in ſe recipiat rurſuſque contraria mutatione alii corpori communicare poſſit.

De hujuſmodi viribus vivis fluido elaſtico compreſſo inſitis earundemque menſuris paucis nunc agam: dignum attentione argumentum eſt, quod eo reducantur menſuræ virium prò machinis aëre, aut igne aut aliis hujuſmodi

di viribus motricibus, quarum fortaſſe plures novæ non ſine inſigni mechanicæ practicæ incremento & perfectione excogitari poterunt, movendis.

§. 40. Ut incipiamus ab aëre in vacuo, conſiderabimus cylindrum verticaliter poſitum ABCD (Fig. 62.) cum ſuſtentaculo EF, quod omni pondere deſtitutum liberrime ſurſum deorſumque moveri poſſit. Sit ſpatio EBCF aër incluſus, totus autem cylindrus in vacuo poſitus fingatur: Sit preſſio aëris EBCF tanta qua ſuſtinere poſſit pondus p, quod æquale erit preſſioni columnæ atmoſphæræ, ſi aër iſte ſit naturalis. Superveniat jam aliud pondus P: ita fiet ut operculum deſcendat in GH motibuſque reciprocis ad puncta H & F agitetur. Ut motum definiamus, utemur hypotheſi ordinaria, quod preſſiones aëris cæteris paribus ſint denſitatibus proportionales. Fig. 62.

Fuerit itaque $FC = a$, $FH = x$; velocitas ſuſtentaculi in ſitu $GH = v$, erit preſſio, qua ſuſtentaculum GH ad ulteriorem deſcenſum urgetur $= P + p - \frac{a}{a-x}p$, huicque preſſioni æqualis cenſenda eſt vis, quæ pondus ſuſtentaculo incumbens animat; igitur ſi hanc vim dividas per maſſam habebis vim accelerantem, quæ multiplicata per tempuſculum ſeu per $\frac{dx}{v}$, dabit incrementum velocitatis dv, eſt itaque

$$dv = (P + p - \frac{ap}{a-x}) \times \frac{dx}{v} : (P + p), \text{ vel}$$

$$\tfrac{1}{2}(P + p)\, vv = (P + p)\, x - ap \log. \frac{a}{a-x}.$$

Sed ex deſcenſu ponderis $(P + p)$ per altitudinem x generatur *vis viva potentialis* $(P + p)\, x$, & cum ſuſtentaculum eſt in ſitu GH, ineſt corpori $(P + p)$ *vis viva actualis* $\frac{1}{2}(P + p)\, vv$, id eſt, $(P + p)\, x - ap \log. \frac{a}{a-x}$, quæ à priori deficit quantitate $ap \log. \frac{a}{a-x}$, hæcque in compreſſionem aëris tranſiit.

Dico itaque *non poſſe aërem occupantem ſpatium* a *condenſari in ſpatium* a — x, *quin vis viva impendatur, quæ generatur ex deſcenſu ponderis* p *per altitudinem* a *log.* $\frac{a}{a-x}$ *quocunque modo illa compreſſio facta fuerit; poteſt autem modis fieri infinitis.* Iſtam vero regulam uno nunc alterove exemplo illuſtrabo.

 Sit

Sit baſis cylindri unius pedis quadrati, altitudo initialis FC duorum pedum: contineaturque in ſpatio BF aër qualis in ſuperficie terræ medius eſſe ſolet, qui ferre poſſit ſuperficie EF 2240 libras: ponatur $x = 1$, ut ſic habeatur *vis viva*, qua duo pedes cubici aëris naturalis in ſpatium unius pedis cubici coërceri poſſunt in vacuo: eritque iſta *vis viva* $= 2 \times 2240 \times$ *log.* $2 = 3105$, id eſt, talis quæ generatur lapſu libero corporis 3105 librarum per altitudinem unius pedis. Ergo & viciſſim, ſi habeatur pes cubicus aëris naturali duplo denſioris, poterit illius ope pondus elevari 3105 librarum ad altitudinem unius pedis in vacuo, dum aëris naturalis denſitatem aſſumit.

Sit porro ſub iisdem reliquis circumſtantiis idem aër in ſpatium duplum, quam antea fuit, expanſum, occupans nunc in cylindro altitudinem quatuor pedum, iſque rurſus condenſetur in ſpatium unius pedis cubici, requiretur ad hanc compreſſionem *vis viva*, quæ exprimitur per 4×1120 *log.* 4, quæ priore duplo major eſt. Igitur in vacuo ſi habeatur pes cubicus aëris naturali duplo denſioris, poterit illius ope pondus elevari 6210 librarum ad altitud. unius pedis, dum aëris naturalis dimidiam denſitatem aſſumit, aut pondus 9315 lib. dum aëre naturali fit quadruplo rarior.

Conſequens inde eſt, ſi aër in ſpatium expandere ſe poſſit infinitum & ubique elaſticitatem ſervet denſitati proportionalem, quantitati aëris finitæ vim vivam ineſſe infinitam.

§. 41. Hæc autem pertinent ad æſtimationem vis vivæ, quæ aëri in vacuo poſito inſita ſit: paullo alius fit computus pro aëre denſiore, qui in atmoſphæra poſitus eſt: hic enim maximus expanſionis gradus non ultra æquilibrium cum aëre atmoſphæræ extendi poteſt: facile hinc eſt in anteceſſum prævidere, ſi v. gr. habeatur pes cubicus aëris naturali duplo denſioris, vim vivam quæ in atmoſphæra ab hoc aëre compreſſo elici poſſit, minime eſſe infinitam. Poterunt autem hujuſmodi vires vivæ hunc in modum determinari.

§. 42. Sit aër EBCF naturalis & in æquilibrio cum aëre externo; intelligatur autem per p preſſio atmoſphæræ, in ſuſtentaculum EF, quæ quidem cum preſſione aëris interni nondum condenſati in æquilibrio eſt. Imponatur eidem ſuſtentaculo pondus P; fuerit jam aër condenſatus in ſpatium GBCH; habeatque ſuſtentaculum pondere P oneratum in ſitu GH velocitatem v, erit retentis reliquis denominationibus

dv =

$$dv = (P + p - \frac{ap}{a-x}) \times \frac{dx}{v} : P, \text{ vel}$$

$$Pvdv = (P - \frac{xp}{a-x})\, dx, \text{ quæ integrata dat}$$

$$\tfrac{1}{2} Pvv = Px + px - ap \log. \frac{a}{a-x}.$$

Jam vero deſcenſu ponderis P per altitudinem x genita fuit *vis viva* Px, de qua eidem ponderi ceu velocitate v moto ineſt pars $\frac{1}{2} Pvv$ ſeu $Px + px - ap \log. \frac{a}{a-x}$; pars igitur vis vivæ quæ ad aërem tranſiit, eſt $= -px + ap \log. \frac{a}{a-x}$, quæ minor eſt altera §. 40. definita.

Habeatur v. gr. pes cubicus aëris naturali duplo denſioris, invenietur vis viva, quam iſte aër amittit, dum aëris naturalis circumfuſi denſitatem aſſumit, ea quæ lapſu libero corporis 865. lib. per altitudinem unius pedis generatur.

Pari ſenſu pes cubicus aëris naturali triplo denſioris vim vivam habere intelligitur talem quæ reſpondeat lapſui libero corporis 2898 lib. per altitud. unius pedis, qui numerus nempe prodit cum ponitur $p = 2240$, ut §. 40; $a = 3$. & $x = 2$.

§. 43. Perſpicuum eſt ex hoc conſenſu inter conſervationem virium vivarum aëri compreſſo & corpori à data altitudine delapſo inſitarum, nullam eſſe ad uſum machinarum perficiendum prærogativam ſperandam ex principio aëris comprimendi, & ubique valere regulas in præcedente ſectione exhibitas. Quia vero multis modis fit, ut aër non vi ſed natura ſit compreſſus aut elaterem naturali majorem acquirat, ſpes certe eſt, poſſe hujuſmodi rebus naturalibus magna ad machinas movendas compendia excogitari, prouti D. Amontons jamjam docuit modum movendarum machinarum vi ignis. Mihi perſuadeo ſi omnis vis viva, quæ in carbonum pede cubico latet, ex eodemque combuſtione elicitur, utiliter ad machinam movendam impendatur, quod plus inde profici poſſit, quam labore diurno octo aut decem hominum. Etenim carbones dum comburuntur aëris elaſticitatem nonſolum inſigniter augent, ſed & ingentem aëris novi quantitatem generant.

Ita Haleſius in *veget. ſtatiks* deprehendit ex ſemipollice carbonis 180. polli-

pollices aëris ejuſdem cum aëre naturali elaſticitatis fuiſſe generatos; ergo pes cubicus carbonum aërem dabit ad 360. ped. cub. Sed ſi §. 41. quæratur vis viva quæ generari poſſit à pede cubico aëris naturali 360. vicibus denſioris, invenietur illam convenire cum pondere 3938000. librarum ab altitudine unius pedis delapſo: atque ſi præterea aëris illius elaſticitas à calore carbonum incenſorum quadruplo fieri major ponatur, conveniet iſta vis viva cum pondere 15752000. lib. ab eadem altitudine delapſo. Difficile autem eſt machinam ad hunc finem aptam excogitare. Multæ præterea aliæ ſunt res naturales, quæ nonſolum aërem fovent compreſſum, ſed & aërem circumfuſum calefaciendo eundem magis elaſticum reddere valent: tales ſunt calx viva cum aqua dulci miſta, omniaque fermentantia, aquæ in vapores vi ignis redactæ incredibilis vis ineſt; machina ad hoc eſt Londini ingenioſiſſima quæ hoc principio motus aquas toti urbi erogat eamque deſcripſit Cl. Weidlerus. Præſertim vero conſiderari meretur ſtupendus, qui à pulvere pyrio expectari poſſit effectus: Calculo enim quorundam ſumtorum experimentorum ſubducto, quem infra adjiciam, edoctus fui elaſticitatem pulveris pyrii accenſi plus decies millies ſuperare elaſticitatem aëris naturalis, imo omnibus bene perpenſis probabile fit, elaſticitatem ejus eſſe incredibiliter majorem: ponamus autem auræ pulveris pyrii accenſi expanſæ elaſticitatem decreſcere in ſimili ratione cum denſitate: hiſce poſitis invenietur vis viva pedi cubico pulveris pyrii inſita, ſi in §. 42. ponatur $a = 10000$; $x = 9999$, $p = 2240$ & ſumatur $-px + ap\log. \frac{a}{a-x}$, quæ quantitas ſic fit æqualis 183913864. Igitur machina datur in theoria, quæ ope unius pedis cubici pulveris pyrii poſſit elevare 183913864 libras ad altitudinem unius pedis, quem laborem vel centum homines robuſtiſſimi intra unius diei ſpatium perficere poſſe non crediderim, quâcunque machina utantur. Probabile autem eſt, ut dixi, effectum pulveris pyrii longe majorem eſſe; certe autem non minor eſt, calculus enim innititur altitudini, ad quam globus ferreus ex tormento bellico ejectus in vacuo aſcendere poſſit, in quo experimentorum genere maxima pulveris pyrii pars perit.

Iſta vero magis percipientur, ſi notetur eundem calculum (quem antea fecimus pro effectu, qui ex aëre condenſato ſeſe reſtituente oritur, demonſtrando) procedere etiam pro aëre qui naturali circumfuſo non quidem magis denſus ſed tamen ab aucto calore magis elaſticus fit: ita v. gr. quoties pes cubicus aëris ordinarii augmento caloris duplum elaterem acquiſivit, po-

poteſt ejus ope pondus 865 librarum ad altitudinem unius pedis elevari, ſi modo machina adhibeatur perfectiſſima.

Ab auctis autem aëris tum denſitate tum calore pendent omnium rerum hic expoſitarum effectus.

§. 44. Interim non ſolum ab aëre condenſato calefactove vis viva pro machinis movendis impendenda obtineri poteſt, ſed & ab aëre rariore aut frigidiore. Ubicunque enim æquilibrium ſublatum eſt, *vis viva* adeſt, quæ impendi poteſt, ſi debita machina excogitetur, ad onera elevanda machinamentaque circumagenda. Methodus autem determinans *vim vivam*, quæ ab aëre datæ denſitatis datique caloris ſpatium datum occupante elici poteſt, mutatis mutandis eadem eſt cum illa quam §. 42. adhibuimus.

45. Fuerit nempe rurſus cylindrus verticalis ABCD (Fig. 63.) cum diaphragmate mobili EF: puta aërem EBCF, ut §. 42. naturalem & in æquilibrio cum aëre externo: preſſio autem aëris cujusvis in EF dicatur p: Finge dein pondus P, quod mediante fune trans duas trochleas M & N ducto cum diaphragmate cohæreat, idemque verſus AD trahat, perveneritque ſic diaphragma ex ſitu EF in GH: Denique ponatur rurſus $FC = a$, $FH = x$: velocitas diaphragmatis in ſitu GH ſeu ponderis in ſitu $P = v$; His poſitis ſi conferantur §. §. 40. & 42. patebit fore nunc Fig. 63.

$$dv = \left(P + \frac{ap}{a+x} - p\right) \times \frac{dx}{v} : P \text{ vel}$$

$$Pvdv = \left(P - \frac{px}{a+x}\right) dx, \text{ quæ integrata dat}$$

$$\tfrac{1}{2} Pvv = Px - px + ap \log. \frac{a+x}{a}.$$

At rurſus deſcenſus ponderis P per altitudinem x producta fuit *vis viva* Px, dum ipſi interim ponderi velocitate v moto ineſt tantum *vis viva* $\frac{1}{2} Pvv$ ſeu $Px - px + ap \log. \frac{a+x}{a}$, Igitur *vis viva*, quæ reſidua eſt, nempe $px - ap \log. \frac{a+x}{a}$, ad aërem tranſiit rurſusque reſtitutione æquilibrii inter aërem internum & externum, illa *vis viva* ad alia corpora pro lubitu transfundi poterit: Igitur ſi habeas ſpatium GBCH aëre plenum cujus denſitas ſit ad denſitatem aëris externi ut CF ad CH, in poteſtate erit *vis viva* $px - ap \log. \frac{a+x}{a}$.

Gg An

An vero iſta vis viva aëri inhæreat proprie externo an interno, logomachia eſt; ſufficit quod à ſublato æquilibrio inter utrumque aërem talis vis viva obtineri poteſt, dum reſtitutio permittitur.

Habeatur v. gr. pes cubicus aëris naturali duplo rarioris, cui hypotheſi quadrabunt poſitiones $p = 2240$ lib. $a = \frac{1}{2}$ ped. & $x = \frac{1}{2}$ ped. & erit vis viva, de qua ſermo eſt, $= 1120 - 1120\, log.\, 2 = 344$, ideſt, ea quæ generatur lapſu libero 344 lib. ab altitudine unius pedis.

Si pes cubicus ſit aëre repletus, qui naturali ſit quadruplo rarior, erit jam vis viva quæſita (poſito nempe $p = 2240$, & $a = \frac{1}{4}$, $x = \frac{3}{4}$) $= 1680 - 560.\, log.\, 4 = 904$, ſeu talis quæ oritur lapſu libero ponderis 904 lib. per altit. unius pedis.

Si denique habeatur pes cubicus ab aëre omnino vacuus, ponendum eſt $p = 2240$; $a = 0$, & $x = 1$: atque ſic erit vis viva quæſita $= 2240 \times (1 - 0\, log.\, \frac{1}{0})$ conſtat autem eſſe $0\, log.\, \frac{1}{0}$ infinite parvum præ unitate; eſt igitur numerus iſte $= 2240$, qui indicat poſſe hac vi viva 2240 libras ad altitudinem unius pedis elevari.

§. 46. Pertinet ad præſens argumentum ſtupenda vis aëris admodum condenſati, ſed præſertim auræ pulveris pyrii accenſi in uſu ſclopetorum pneumaticorum & tormentorum bellicorum. De his quæ ſeorſim commentatus ſum huic ſectioni adjiciam.

De vi aëris condenſati & auræ pulveris pyrii accenſi ad globos projiciendos in uſu ſclopetorum pneumaticorum & tormentorum bellicorum.

Fig. 64. (I) Sit AG (Fig. 64.) longitudo animæ in tormento ſclopetove horizontaliter poſito, voceturque $= a$: denotet A C longitudinem ſpatii, quod aër condenſatus ſeu aura pulveris pyrii accenſi occupat ab initio exploſionis, ſitque $AC = b$: pondus globi ejiciendi $E = 1$; ponimus autem, globum cavitatem animæ exacte replere & liberrime in illa moveri: denſitas aëris condenſati in ſpatio AD ſe habeat ad denſitatem aëris naturalis ut n ad 1: Denique

que ponatur pondus columnæ mercurii (cujus baſis eſt CD & cujus altitudo eadem ſit quæ in barometro) $=$ P. Utemur autem hypotheſi, ſive globus propellatur ab aëre condenſato ſive à pulveris pyrii aura, potentiam illius fluidi propellentis proportionalem eſſe denſitati.

His ad calculum præparatis, globum conſiderabimus in ſitu e, ponendo $Ae = x$, velocitatemque globi in hoc ſitu $= v$, ſic erit potentia globum in ſitu e propellens $= (\frac{nb}{x} - 1) \times P$, quæ diviſa per maſſam 1 ductaque in elementum ſpatii dx dat incrementum dimidium quadrati velocitatis; unde fit $v\,dv = (\frac{nb}{x} - 1) \times P\,dx$, ſive $\frac{1}{2} v.v = (b - x + nb\ log.\ \frac{x}{b})$ P. Ponatur $x = a$, habetur altitudo debita velocitati, quacum globus exploditur; vocetur iſta altitudo α & erit

$$\alpha = (b - a + nb\ log.\ \frac{a}{b}) \times P.$$

(II) Sit v. gr. in ſclopeto pneumatico longitudo animæ ſeu $a = 3$ *ped. Paris.* longitudo A C $= 4$ *poll.* fueritque aër captus in A D naturali decies denſior ſeu $n = 10$, diameter animæ ſeu globuli ejiciendi trium linearum ejusque gravitas ſpecifica ratione mercurii ut 10 ad 17. Erit P prœterpropter $= 286$; indeque invenitur $\alpha = 2788$, indicio globum ejectum iri velocitate qua in vacuo ad altitudinem 2788 *ped.* aſcendere poſſit. Ex præcedente formula colligitur jactum globi vehementiſſimum fore pro eadem auræ elaſticæ quantitate, ſi longitudo animæ fiat $= nb$. Si vero animus ad impedimenta alia, quæ globus præter inertiam ſuam & reſiſtentiam aëris externi in tranſitu ſuo per Sclopeti animam patitur, advertatur, apparet longitudinem animæ ad jactum vehementiſſimum producendum requiri longe minorem. Si longitudo nb admodum major ſit longitudine a, quod ita eſt in jactibus fortioribus, erit ſine ſenſibili errore $\alpha = nbP\ log.\ \frac{a}{b}$.

Si tormentum ſit verticaliter erectum, fit aliquantum diverſus calculus ſed pro vehementioribus jactibus differentia nequit eſſe ſenſibilis. Igitur quia jactus deinceps conſiderabimus tantum vehementiſſimos, brevitatis ergo ponemus $\alpha = nbP \times log.\ \frac{a}{b}$.

(III) Prouti in præcedentibus altitudinem determinavimus debitam ve-

 lo-

locitati qua globus exploditur, ex data vi elaſtica auræ globum ejicientis, ita viciſſim patet, ex obſervata illa altitudine vim auræ elaſticam deduci poſſe, eſt enim

$$n = \alpha : \left(b\,P\,log.\,\frac{a}{b} \right).$$

Exinde poterit vis elaſtica pulveris pyrii ſi non accurate definiri, ſaltem ad terminos reduci, quos certe ſuperabit. At quæres, qui altitudo α experimento determinari poſſit; ad quod reſpondeo, poſſe eam ſat accurate colligi ex tempore, quod globus verticaliter ſurſum ejectus ab exploſionis puncto inſumit, dum in terram delabitur habita in calculo aëris reſiſtentiæ ratione. Transſcribam huc experimenta in *comm. Acad. Petrop. tom. 2. p. p.* 338 & 339 recenſita, quorum calculum inſtitui factis, ratione aëris reſiſtentiæ hypotheſibus, gravitates ſpecificas ferri & aëris eſſe ut 7650 ad 1 & aërem, in quo globus aſcendit, uniformis eſſe denſitatis: gravitatum ſpecificarum ratio paullo major aſſumta fuiſſe videtur quam debebat, ſed compenſabitur in altiſſimis jactibus error à diminutione aëris denſitatum verſus ſuperiora.

„ Tormenti ſitus omni accuratione ad perpendiculum erat accommo-
„ datus & ſingulis vicibus in hunc ſitum reponebatur atque firmabatur: ſin-
„ gula experimenta fuerunt repetita: Erat autem longitudo animæ 7, 7. *ped.*
„ *angl.* diameter globi erat 0, 2375 *ped.* diameter animæ menſurata non fuit
„ neque magnitudo luminis accenſorii: qualibet vice ponderabatur quantitas
„ pulveris pyrii adhibiti & pendulo definiebatur tempus à puncto exploſionis
„ ad punctum, quo globus in terram cecidit: tabula ſequens exhibet, tum
„ quæ obſervata, tum quæ calculo inde eruta fuerunt.

quant. pulv. pyr. numero unciar. holl. expreſſ.	tempus aſc. & deſcens. in min. ſec. obſerv.	altit. jactus in aëre reſiſt. per calculum in ped. Angl.	temp. aſc. in aëre reſiſt. per calculum in min. ſec.	temp. deſc. in aëre reſiſt. per calculum in min. ſec.	altit. jactus in vacuo per calculum in ped. Angl.	temp. aſcenſ. & deſc. in vacuo per calc. in min. ſec.
I	II	III	IV	V	VI	VII
$\frac{1}{2}$	11	486	5, 42	5, 58	541	11, 6
2	34	4550	14, 37	19, 63	13694	58
4	45	7819	16, 84	28, 16	58750	121

„ Pro

„ Pro eodem tormento eodemque globo, ſed priori diminuto pede uno „ cum ſeptem decimis partibus, ſic ut longitudo animæ reſidua eſſet præciſe „ 6. *ped. Angl.* inſervit ſequens tabula eadem lege conſtructa.

I	II	III	IV	V	VI	VII
½	8	257	3 ,95	4 , 05	274	8 , 2
2	20, 5	1665	9 ,74	10, 76	2404	24, 5
4	28	3187	12, 5	15, 5	6604	40, 5
6	32, 5	4304	13, 9	18, 6	11810	54, 3
8	38	5643	15, 54	22, 46	22394	74

Multa ſunt, quæ ſucceſſum horum experimentorum ita reddunt dubium, ut nullum ſit, quod eandem auræ elaſticitatem arguat. Maximam ego inæqualitatem ex eo oriri crediderim; quod minima pars pulveris inflammetur ſtatim ab exploſionis initio, quod magna pars tum demum accendatur, cum globus orificio tormenti jam proximus eſt, & quod maxima denique pars non inflammata ejiciatur: facit fortaſſe hæc ſola ratio, ut vis elaſtica auræ globum propellentis ſit centies major, quam quæ vi experimenti, nulla habita iſtius rei ratione, prodit: id mihi valde probabile fit, ex eo quod adhibito in tormento 7, 7 *ped.* longo pulvere ad 4 uncias globus in vacuo jactu ſuo aſcendere potuerit ad altitudinem 58750 *ped.* cum eadem pulveris quantitate eodemque tormento ſed 1, 7 pede decurtato jactus reſponderit altitudini in vacuo 6604 pedum, quæ altitudo vix ultra nonam partem prioris excurrit: Ex comparatione utriusque experimenti conjicio, maximam pulveris quantitatem in tormento longiore inflammatam fuiſſe dum globus jamjam eſſet orificio proximus neque ab ipſo ultra 1, 7 *ped.* amplius diſtaret.

Diminuitur quoque jactus globi à magnitudine luminis accenſorii, ut & ab hiatu qui inter globum & internam animæ ſuperficiem relinquitur, per quod utrumque notabilis auræ pars inutilis avolat: tanta autem inde diminutio non oritur, quantam illam nondum poſito calculo præſumſeram: adjiciam tamen inſequentibus calculum, ut methodus habeatur vi pulveris pyrii longiſſimos ſtatuendi limites, quos etiamnum certe transgrediatur.

(IV) Quod maximam oſtendit auræ elaſticitatem eſt experimentum tertium cum tormento nondum decurtato ſumtum, quod indicat aſcendere potuiſſe globum accepto impetu ad altitudinem $\alpha = 58750$ *ped. Angl.* Erat autem longitudo animæ A G ſeu $a = 7, 7$: longitudo A C (quantum ex amplitudine animæ & gravitate pulveris pyrii conjicio) erat $= 0, 08$. Denique valor ipſius P (ſeu ponderis columnæ mercurialis, cujus baſis ſit circulus maximus globi & cujus altitudo ſit 30. *poll. Angl.* ratione ponderis globi ferri deſignati per unitatem) invenitur poſita gravitate ſpecifica inter mercurium & ferrum ut 17 ad 10 $= 26, 8$: Et cum per §. *III.* ſit proxime $n = \alpha : (b P \log. \frac{a}{b})$ erit $n = 6004$. Unde ſequitur, ſi aura pulveris pyrii inflammati elaſticitatem habeat ſuæ denſitati proportionalem, eſſe illius maximam elaſticitatem minimum ſexies millies majorem elaſticitate aëris ordinarii.

(V) At vero ſi jam conſideremus partem auræ inutilem, quæ avolat per lumen accenſorium & hiatum à globo relictum, majorem elaſticitatem inveniemus: Calculus qui ad hanc quæſtionem ſolvendam requiritur, cum non parum prolixus atque intricatus ſit, non hæſitavi hypotheſes adhibere paullo liberiores, quibus admodum facilitatur: quamvis ipſæ hypotheſes non ſint omni rigore veræ, errorem tamen notabilem producere non poſſunt. *Primo* ponam utramque aperturam, per quam aura evolare poſſit, eſſe veluti infinite parvam ratione animæ amplitudinis; hoc poſito poterit ſingulis momentis velocitas, cum qua aura avolat, æſtimari immediate ex preſſione ſola: hujusmodi autem hypotheſin ſine ullo ſenſibili errore fieri poſſe pro omni fluido, tunc etiam cum foramina non ſunt admodum exigua, paſſim ut corollarium ex theoria noſtra deduximus, & multo facilius aſſumi poſſe in fluido valde elaſtico facile quisque videbit ex eo, quod incrementum *aſcenſus potentialis* ratione motus interni longe minus eſt ratione *aſcenſus potentialis* particulæ per foramen exilientis in fluido, quod à propria elaſticitate expellitur, quam quod gravitatis vi ejicitur: in priori enim minor eſt motus localis internus quam in altero. *Secundo* auræ pulveris pyrii inflammati vim elaſticam tantam eſſe, ut niſus atmoſphæræ contrarius attendi non mereatur: *tertio* velocitatem globi in tormento utut permagnam, tamen minimam cenſeri poſſe ratione velocitatis, qua aura per hiatum utrumque avolat, quia nempe inertia iſtius auræ non poteſt non admodum eſſe exigua ratione inertiæ

ertiæ quæ globo ineſt : vi iſtius hypotheſeos avolabit aura per utramque aperturam eadem velocitate, cum alias poſita velocitate in lumine accenſorio $= \sqrt{A}$, & velocitate globi $= v$, velocitas auræ in hiatu à globo ad ſuperficiem animæ relicto dicenda eſſet $= \sqrt{A} - v$. Venio nunc ad ſolutionem.

(VI) Primo notandum eſt, ſi elaſticitates auræ cenſeantur denſitatibus proportionales, fore ut aura conſtanter eadem velocitate per utramque aperturam avolet, uti vidimus in problemate §. 34. iſtaque velocitas nominatim talis erit, quæ generetur ab altitudine auræ homogeneæ, cujus pondus auram captam coërcere poſſit, ne ſe expandat. Igitur determinabitur dicta velocitas hoc modo : ſit gravitas globi $= 1$, elaſticitas ſeu pondus quod auram pulveris modo inflammati A C D B in illo compreſſionis ſtatu coërcere poſſit $= P$: pondus pulveris adhibiti $= p$; erit pondus auræ pulveris modo inflammati etiam $= p$: ſique longitudo A C ponitur $= b$, patet altitudinem auræ homogeneæ, quæ pondus P habeat, fore $= \frac{P}{p} b$; Igitur velocitas quacum aura recens nata per lumen accenſorium avolat eſt $= \sqrt{\left(\frac{P}{p} b\right)}$, eademque velocitate durante tota exploſione ejicietur, idque non ſolum per lumen accenſorium, ſed & proxime per hiatum inter globum & animam relictum.

(VII) Sit nunc porro amplitudo animæ $= F$; hiatus interceptus inter globum & animam $= f$: amplitudo luminis accenſorii $= \phi$: longitudo animæ $= a$, quantitas auræ ab initio exploſionis $= g$. Intelligatur deinde globus perveniſſe ex E in e, dicaturque A C $= x$: quantitas auræ eo temporis puncto in tormento reſidua $= z$: velocitas globi in iſto ſitu $= v$, reliquæ denominationes fuerunt jam antea explicatæ.

Quoniam elaſticitas per hypotheſin eſt directe ut quantitas & reciproce ut ſpatium, erit elaſticitas auræ in A c d B reſiduæ $= \frac{zb}{gx} P$: quæ quidem non tota in propellendum globum impenditur, ſed tantum pars ejus, quæ ſe habeat ad totam ut $F - f$ ad f. Eſt itaque poſito dt pro elemento temporis

$$dv = \frac{F-f}{F} \times \frac{zb}{gx} P \times dt.$$

Per methodum autem §. 34. exhibitam, ubi quantitas aëris dato tempuſculo effluens ſpecifice definita fuit, invenitur $-dz$

$$-dz = \frac{f+\phi}{F} \times \frac{z}{x} \times \sqrt{\left(\frac{P}{p} b\right)} x dt;$$

Ex comparatione harum duarum æquationum oritur

$$-dz = \frac{f+\phi}{F-f} \times \frac{g}{b} \times \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{Pp}} \times dv,$$

quæ cum debitæ conſtantis additione integrata dat

$$z = g - \frac{f+\phi}{F-f} \times \frac{g}{b} \times \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{Pp}} \times v.$$

Si jam in æquatione prima ſubſtituatur valor iſte inventus pro z, ſimulque ponatur $\frac{dx}{v}$ pro dt, fiet

$$v dv = \frac{F-f}{F} \times \frac{b}{x} \times P \times dx - \frac{f+\phi}{F} \times \frac{\sqrt{(bP)}}{x\sqrt{p}} \times v dx, \text{ ſive}$$

$$\frac{F v dv \sqrt{p}}{(F-f) \times b P \sqrt{p} - (f+\phi) \times v \sqrt{(bP)}} = \frac{dx}{x},$$

quæ æquatio poſt debitam ſui integrationem, facta $x = a$, abit in hanc

$$\log. \frac{a}{b} = \left[-F(f+\phi) v \sqrt{p} - F(F-f) p \sqrt{(Pb)} \times \log.\left(1 - \frac{(f+\phi) v}{(F-f)\sqrt{(bPp)}}\right)\right] : (f+\phi)^2 \times \sqrt{Pb}.$$

(VIII) Si jam per experimentum innotuerit valor ipſius v, poterit inde deduci valor ipſius P, qui denotat elaſticitatem auræ pulveris pyrii nondum expanſæ: Quod ut exemplo illuſtremus, eodem utemur experimento, quod jam articulo IV. expoſuimus, ut appareat inde, quodnam ab avolatione auræ elaſticitatis augmentum arguat. Sic igitur ponetur calculus.

Quia pondus globi, quod erat trium librarum, indicavimus per unitatem, erunt quatuor unicæ pulveris adhibitæ exprimendæ per $\frac{1}{12}$: igitur $p = \frac{1}{12}$. Menſuras aperturarum, quas conſideramus, non accepi: ſolet autem hiatus à globo relictus conſtituere in ſimili tormento præterpropter partem decimam quintam amplitudinis animæ; amplitudinem luminis accenſorii hic fere negligi poſſe puto; itaque ſtatuam $F = 15$; $f = 1$; $\phi = 0$: Deinde habetur rurſus $a = 7, 7$; $b = 0, 08$; altitudo ad quam globus in vacuo aſcendere poſſit ſeu $\frac{1}{2} vv = 58750$, ſeu $v = 343$: Igitur æquatio ultima ſuperioris articuli hæc erit

$$\log. 96 = \frac{-5251}{\sqrt{P}} + 17, 5 \log. \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{P} - 300},$$

cui proxime ſatisfit cum ſumitur $\sqrt{P} = 534$ & proinde $P = 285156$, quod efficit pondus columnæ mercurialis ejusdem cum anima tormenti ampli-

plitudinis, cujus altitudo ſit plusquam 10000 vicibus major altitudine communi barometri, invenimus autem ſupra *art. IV.* numerum n (qui idem ſignificabat) $= 6004$. Ergo jam tuto affirmabimus (ubique enim quæ neglegeximus majorem vim pulveri arguunt) ineſſe pulveri pyrio vim elaſticam, minimum decies millies majorem vi elaſtica aëris ordinarii. Apparet autem ſimul ex comparatione numerorum 10000 & 6004, quantum circiter vi pulveris decedat ab hiatibus ſæpe dictis. Equidem iſtud decrementum majus putaſſem: Confirmatus autem ſum hoc calculo in re de qua aliquando me certiorem voluit vir harum rerum gnarus, nullum nempe ſe in tormentis notabile obſervaſſe decrementum, cum lumen accenſorium diuturno uſu ſupra modum amplificatum eſſet in obſidio.

(IX) Verum ut ex æquatione noſtra quædam corollaria deduci poſſint faciliora quamvis proxime tantum vera, mutabimus quantitatem logarithmicalem in ſeriem. Eſt autem

$$-\log.\left(1-\frac{(f+\phi)v}{(F-f)\sqrt{(bPp)}}\right)=\frac{(f+\phi)v}{(F-f)\sqrt{(bPp)}}$$

$$+\frac{(f+\phi)^2 vv}{2(F-f)^2\times bPp}+\frac{(f+\phi)^3 v^3}{3(F-f)^3\times bPp\sqrt{(bPp)}}+\&c.$$

Iſtoque valore ſubſtituto in æquatione ultima *art.* (*VII*) fit

$$\log.\frac{a}{b}=\frac{Fvv}{2(F-f).bP}+\frac{F.(f+\phi)v^3}{3.(F-f)^2 bP\sqrt{(bPp)}}+\&c.$$

Notabimus hic iſtam æquationem perfecte convenire cum æquatione ultima *art.* (*II*) ſi aperturæ f & ϕ ponantur $=o$: quod enim hic indicatur per $\frac{1}{2}vv$ & n P ibi eſt α & P, convenientibus denominationibus reliquis.

(X) Ut appareat, quantum proxime altitudo jactus ab aperturis diminuatur, ſi iſtæ aperturæ ſint minimæ, inſerviet hæc æquatio. Intelligatur per α altitudo ad quam globus pervenire poſſit in vacuo, ſi nulla auræ quantitas per aperturas avolare ponatur, & erit decrementum iſtius altitudinis ab eruptione auræ per eaſdem aperturas oriundum proxime hoc

$$[(2\alpha)^{\frac{3}{2}}\times(f+\phi)]:[3F\times\sqrt{(bPp)}].$$

Unde in eodem tormento adhibitaque eadem pulveris quantitate & manente globi pondere, erunt decrementa jactuum proportronalia amplitudinibus aperturarum.

Decrementa eadem fere ſequuntur rationem ſubduplicatam quantitatum pulveris adhibitarum cæteris paribus ; quia enim logarithmi magnorum numerorum in multo minori creſcunt ratione ac numeri ipſi & quoniam inſuper eſt $\alpha = b\,P\,log.\,\frac{a}{b}$, poterit cæteris paribus ſtatui α proportionale ipſi b, quia P non afficitur à b. Sed decrementum, de quo ſermo eſt, ceteris paribus rationem ſequitur quantitatis $(\alpha^{\frac{3}{2}}) : (\sqrt{bp})$ ſeu rationem quantitatis $\frac{b}{\sqrt{p}}$; ipſum vero p, quod pondus denotat pulveris adhibiti eſt ut b; igitur decrementum prædictum ſequitur proxime rationem $\sqrt{b}$, quæ ſubduplicata eſt quantitatis pulveris adhibiti. Igitur ratione habita jactuum, decrementa multo majora ſunt in jactibus debilibus, quam vehementioribus, idque etiam experimenta *art.* (*III*) recenſita confirmare videntur : non video enim aliam rationem, cur in prima tabula experimentorum globi jactus in vacuo, ſumtis duabus pulveris unciis, plus quam vigeſies ſexies altior eſſe debuerit, quam cum uncia dimidia ſumeretur, & cur mox duplicata pulveris quantitate ad 4. uncias jactus tantum quadruplo altior poſt calculum prodeat, quam quantitate duarum unciarum.

(XI) Quæ reliquæ in utraque tabula comparent experimentorum inæqualitates, eas ut ſupra dixi, maximam partem derivo ab eo, quod pulvis non omnis inflammatur, nec is qui inflammetur omnis ſtatim ab initio exploſionis flammam concipiat. Neque certe id mirabimur, cum perpendimus totum exploſionis tempus in *exper.* 4. *tab.* 1. nequidem centeſimam unius minuti ſecundi partem efficere. Igitur cum certum ſit maximam pulveris partem non inflammatam ejici, nec exiguam partem reliqui tardius inflammari, quam in calculo poſitum fuit; cumque præterea notabilis pulveris pars fucata ſit vaporibus materiaque terreſtri, quæ non accenditur, ſequitur longe majorem ineſſe elaſticitatem partibus accenſis, quam quæ experimenti calculo *art.* (*X.*) determinata fuit, fortaſſe decies aut centies major eſt.

At vero ſit tantum talis, quam experimentum oſtendit, elaſticitate nem-

nempe aëris ordinarii decies millies major; ſequitur inde auram illam elaſticam, quæ ex pulvere pyrio accenſo elicitur aut non aërem eſſe communem aut elaſticitates in majori ratione creſcere quam denſitates: non poteſt enim denſitas aëris, qui à pulvere modo inflammato oritur, eſſe plus quam millies denſitate aëris ordinarii major, ſi pulvis vel totus ex aëre compreſſo compoſitus ſit, quod ex gravitate pulveris ſpecifica ratione aëris concludo.

Quæſtio interim jamdudum eſt agitata, an aura elaſtica factitia, quæ ex corporibus deducitur, aër ſit ordinarius nec ne, quam ego quæſtionem non decidam.

Si tamen ponatur, pulverem pyrium aërem eſſe naturali millies denſiorem & decies millies magis elaſticum, tum ex §. 4. ſequetur, aërem vi infinita compreſſum non poſſe pluribus quam 1331. vicibus condenſari & ſecundum eandem regulam foret aëris naturali quadruplo denſioris elaſticitas ad elaſticitatem aëris naturalis ut $4\frac{1}{4}$ ad 1.

An vero experimenta ab aliis inſtituta, quæ harum elaſticitatum rationem faciunt accurate ut 4 ad 1 ſufficiente accuratione facta fuerint & an calor aëris dum comprimebatur idem permanſerit? neſcio. Veroſimile autem eſt, eandem auram quæ in poris pulveris pyrii latet, cauſam eſſe elaſticitatis corporum elaſticorum aut villorum contractilium: dum enim in cavernulis ſcatet, ſi corpora in figuram inſolitam vi quadam redigantur, comprimitur aura elaſtica, cavernuliſque dum reddit figuram capaciſſimam corpus reſtituit in priſtinam figuram & longitudinem.

HYDRODYNAMICÆ
SECTIO UNDECIMA.
De fluidis in vorticem actis, tum etiam de iis, quæ in vaſis motis continentur.

§. I.

EX eo tempore quo Keplerus & Carteſius vortices adhibuere pro variis naturæ phænomenis explicandis, multi operam ſuam haud male ſe collocaturos rati ſollicite iſtud argumentum ruminati ſunt: primus autem, ni fallor, naturam ejus recte penetravit Hugenius in *tract. ſur la peſanteur*; ſuperaddam quædam, quæ ad inſtitutum meum pertinent, ab aliis fortaſſe non ſatis examinata.

Poni autem ſolent vortices ad ſtatum *permanentiæ* ſeu durationis reducti, ita ut nulli mutationi ſubjectum lege conſtanter eadem moveatur fluidum.

Fig. 65. & 66. §. 2. Sit cylindrus ABCD (Fig. 65. & 66.) verticaliter poſitus, cujus axis GH, iſque ad certam altitudinem plenus ſit, concipiatur aqua in vorticem acta ſintque omnia jam ad ſtatum durationis reducta: Ita ſuperficies aquæ deprimetur verſus axem & elevabitur verſus latera: Sectionem per axem terminatam à ſuperficie aquæ repræſentabimus curva EOF, hujuſque curvæ nunc indolem dabimus ex data relatione, quam inter ſe habent velocitates ſub certis ab axe diſtantiis.

Ducantur ga & fn infinite propinquæ & horizontales, agaturque am verticalis: Sit $Og = x$, gf ſeu $am = dx$, $ga = y$, $mn = dy$: Patet autem quamlibet guttulam in ſuperficie poſitam niſu ſuo, ex vi centrifuga horizontali & vi gravitatis verticali, compoſito perpendiculariter ſuperficiei inſiſtere, quia ſi oblique contranitatur nihil ſit, quod guttulam in loco ſuo conſervet.

Igitur ſi vis centrifuga guttulæ in a poſitæ exprimatur per horizontalem

ba & vis gravitatis per verticalem ca compleaturque rectangulum $abec$, erit diagonalis ae ad curvam perpendicularis; unde triangulum eca ſimile eſt triangulo amn & ſic $dx : dy = ec : ca = ba : ca$, vel ut vis centrifuga in puncto a ad vim gravitatis.

Demonſtravit autem Hugenius vim centrifugam corporis in gyrum acti celeritate, quam lapſu libero per altitudinem dimidii radii acquirere poſſit, æqualem eſſe vi ſuæ gravitatis: quod ſi proinde altitudo reſpondens guttulæ velocitati gyratoriæ dicatur V; vis gravitalis g: erit vis centrifuga $= \frac{2gV}{y}$, unde $dx : dy = \frac{2gV}{y} : g$, vel $dx = \frac{2V\,dy}{y}$.

§. 3. Si ponatur $V = \frac{1}{2}y$, fiet $x = y$ & proinde linea EO erit recta conſtituens cum axe GH angulum ſemirectum habebitque cavitas formam coni: Si vero ſervata eadem proportione velocitatum, quæ nempe ſint ubique radicibus diſtantiarum ab axe proportionales, aquæ celerius tardiuſve circumagantur, fiet angulus EOG eo acutior, quo celerius moventur, ita ut ſi infinita fuerit velocitas, tunc aquæ perpendiculariter fundo inſiſtere debeant inſtar muri, cavitatemque cylindricam interius formare, ſi modo operculum ſit in AD, quod impediat, quominus aquæ omnes ejiciantur.

§. 4. Si ponatur paullo generalius $2V = fy^e$, fiet $dx = fy^{e-1}dy$ vel $x = \frac{f}{e}y^e$: Hinc ſequitur curvam ſemper fore verſus axem concavam, ut in figura 65, ſi ſit e major unitate atque convexam, ut in fig. 66. ſi ſit minor. In priori caſu eſt angulus EOG ſemper rectus, in altero ſemper nullus: in ſolo caſu quo $e = 1$ poteſt angulus iſte eſſe qualiſcunque.

§. 5. Inſervire poſſunt hæc ad dignoſcendam quodammodo ſcalam velocitatum in vortice artificioſe producto: ſi enim ſuperficiem videas concavam, recte judicabis velocitates majori creſcre ratione, quam diſtantiæ ab axe creſcant, ſi convexam contrarium deduces. Si curva non videatur ad parabolicum genus pertinere, indicium erit velocitates non poſſe comparari cum diſtantiarum determinata aliqua potentia. Quo major obſervata fuerit linea EM terminata ab horizontali OM, eo major putabitur velocitas particularum abſoluta ſeu littera f.

§. 6. Exiſtimo autem non poſſe vorticem in ſtatu ſuo per tempus aliquod notabile permanere, ſi vires centrifugæ partium æqualium in fluido homogeneo creſcant ab axe verſus peripheriam: hoc enim ſi eſſet, cum nihil ſit, quod partium axi viciniorum vim centrifugam ſufficienter coërceat, fieret utique, ut partes illæ viciniores perpetuo ab axe recederent, remotioresque ad illum propellerent, neque unquam in hoc ſtatu æquilibrium aut ſtatus durationis obtineri poſſet. Apparet inde quantitatem hanc $\frac{2gV}{y}$ (quæ nempe in fluidis homogeneis vim centrifugam partium æqualium exprimit) aut una creſcere cum y aut ſaltem non decreſcere, atque ſic ſi rurſus ad ſpecialem hypotheſin antea factam ($2V = fy^e$) deſcendamus, non poterit e eſſe minor unitate. Igitur in omnibus vorticibus, de quibus hic ſermo eſt, ad ſtatum durationis reductis, ſuperficies nunquam convexa erit, ut in figura 66, ſed ſemper aut concava, ut in figura 65. aut conica: & quia e vel major eſt unitate vel eidem æqualis, aliter fieri non poteſt, quin velocitates aut æquali aut majori ratione creſcant cum radicibus diſtantiarum ab axe. Hæc cum ita mecum perpendo, non intelligo quemadmodum Newtonus fingere ſibi potuerit duos vortices fluidi ubique homogenei ad ſtatum perpetuæ durationis reductos, in quorum altero *tempora periodica partium ſint ut earum diſtantiæ ab axe cylindri, in altero autem ut quadrata diſtantiarum à centro ſphæræ*: Nam in horum vorticum altero velocitates ubique eſſent æquales, & in altero plane decreſcerent ab axe verſus peripheriam.

Magis veroſimile eſt, in pleriſque vorticibus, qui ſtatum perdurationis jam attigerint, fluidi ſive homogenei ſive heterogenei partium ſingularum tempora periodica eadem fore, quaſi totus cylindrus ſolidus fuerit, partes autem quæ ſint ſpecifice graviores circumferentiæ, viciniores futuras eſſe. In hoc caſu fit v proportionale ipſi y & V proportionale ejusdem quadrato, curvaque EOF erit parabola Apolloniana, cujus vertex in O & cujus axis ſit OG.

Præſertim hæc ita proxime fore præſumo, ſi vortex generetur à rotatione vaſis cylindrici circa axem HG, vel etiam ab agitatione uniformi baculi juxta latera vaſis, cujuſmodi vorticum phænomena expoſuit *D. Saulmon in Comm. Acad. Reg. ſc. Pariſ. a.* 1716.

§. 7. Preſſiones quas diverſæ cylindri ABCD partes à fluido ſuſtinent, pro-

proportionales ſunt altitudinibus columnarum verticalium iisdem partibus reſpondentium : neque enim requiritur, ut huic ponderi conatum fluidi à vi centrifuga oriundum addamus, quia conatus iſte effectum jam obtinuit in elevandis aquis: Atque ſi vas non fuerit cylindricum ſed irregularis utcunque ſtructuræ, licebit cylindrum fingere, cujus axis coincidat cum axe rotationis, fluido ita plenum, ut punctum O tam in vaſe propoſito quam in cylindro fictitio in eodem loco poſitum ſit: tanta enim in quovis cylindri puncto preſſio erit, quanta eſt in eodem puncto, quatenus id ad vas propoſitum pertinet. Apparet ex hoc ipſo, poſſe ſuperficies vorticum ex alio principio quam quo ante uſi ſumus definiri: Ducta nempe linea horizontali O M & verticali N a cum ſua infinite propinque $p\, n$ ſequitur altitudinem Na ſeu Og proportionalem eſſe vi centrifugæ omnium particularum quæ ſunt in O N & differentiam altitudinum duarum proximarum, nempe $a\, m$ ſeu gf, proportionalem vi centrifugæ particulæ Np: Unde rurſus derivatur æquatio finalis, quam §. 2. dedimus, nempe $dx = \frac{2Vdy}{y}$.

§. 8. Videamus nunc quid accidere debeat corporibus vortici innatantibus; ut autem quæſtio eo diſtinctior atque ſimplicior fiat, corporis loco conſiderabimus globulum parvum ejusdem cum fluido vorticoſo gravitatis ſpecificæ.

Globulus talis fluido commiſſus duabus ſtatim potentiis ſollicitatur, altera tangentiali ab impetu fluidi ortum trahente, altera centripeta, quæ à vi fluidi centrifuga naſcitur. Iſtæ vires conſtantem ſervant inter ſe rationem, quadratam nempe velocitatis fluidi *reſpectivæ*; ſive quieſcat corpus ſive motu circulari feratur.

Notari autem meretur ab iis, qui in explicandis gravitatis phænomenis, adhærent principiis Carteſianis, vim tangentialem eſſe incomparabiliter majorem vi centripeta: eſt enim illa ad hanc, ut diſtantia corporis ab axe vorticis ad octo tertias partes diametri globi; demonſtrationem videre eſt in *Comment. Acad. Petrop. tom. II. p.* 318. & 319.

§. 9. Quamvis ſciam multa à variis allegata fuiſſe, ut oſtenderent, materiam ſubtilem celerrime in vorticem actam corpora quidem verſus axem detrudere poſſe neque tamen inde ſequi, ut ſimul à vortice deferantur iſta corpora,

ra, non potui tamen hunc mihi ſcrupulum eximere, poſtquam cognovi vim tangentialem vi centripeta eſſe pene infinite majorem. An non melius huic difficultati occurritur, ſi duos ſuper eodem axe vortices ſtatuamus contrarios & æqualis virtutis: Videtur enim, phænomena naturæ plurima conciliari non poſſe cum vorticum hypotheſi, niſi ponamus duos pluresve vortices liberrime ſub qualicunque directione ſe invicem trajicere poſſe: vel ſola gravitatio communis omnium corporum cæleſtium verſus ſe invicem, quæ in dubium vocari nequit, ſatis oſtendit aut valedicendum eſſe hypotheſi vorticum, aut liberrimam vorticum plurium in omnes plagas decusſationem ſtatuendam eſſe. Si igitur duo vortices æqualis virtutis contrarii ſuper eodemque axe fingerentur, tunc impetus contrarii deſtruerent vires utriusque vorticis tangentiales; ſimul autem uterque vortex concurreret ad corpus verſus axem communem deprimendum.

§. 10. Altera accedit difficultas, quominus poſſit corporum gravitas peti ex effectu duorum vorticum contrariorum ſuper eodem axe motorum. Ita enim corpora non verſus punctum commune aut quaſi punctum ſed verſus axem gravitarent, motuque ad eundem perpendiculari laberentur, quod cum deſcenſu corporum verticali & rotunditate vel quaſi rotunditate terræ corporumque cœleſtium pugnat.

Huic alteri quoque difficultati occurretur, ſi fingantur duo axes ad ſe invicem perpendiculares aut proxime tales, circa quorum utrumque duo vortices contrarii æqualis virtutis circumagantur. Namque vis compoſita omnium vorticum ita intelligi poteſt comparata, ut corpus detrudat proxime verſus punctum, quo ambo axes ſe invicem interſecant; ſemper tamen foret terra aliquantum compreſſa verſus planum per ambos axes tranſiens. Poterit autem vel huic incommodo, ſi modo incommodum ſit, obviam iri, multiplicando admodum vorticum numerum: nam ſi vel infiniti fere ſtatuantur vortices, poterunt omnes eadem facilitate ſe trajicere, ac radii luminis, qui ſe minime impediunt.

Volui iſta hic adjicere in gratiam eorum, qui vorticibus delectantur, ut videant, an motus iſte facilius concipi poſſit eo, quem Hugenius finxit: utroque enim phænomena naturæ æqualiter explicari poſſunt. Hanc ſententiam paullo accuratius expoſui in diſſertatione, quam Academia Reg. Sc. Pariſ. præmio a. 1734. affectam imprimi curavit.

§. 11.

§. 11. Quia dubitari nequit, quin omnes planetæ verſus ſolem & ſatellites verſus ſuos planetas ad mentem Newtoni *graviteut*, hujusque gravitatis cauſa affinis ſit cum illa qua corpora terreſtria verſus centrum terræ tendunt, erit vorticum hypotheſis ad totum ſyſtema mundi extendenda, ſi pro gravitate corporum terreſtrium explicanda adhibeatur. Ita vero planetæ, materiæ ſubtili innatantes, moverentur in medio reſiſtente, paulatimque de motu ſuo aliquid perdentes ad centrum ſolis accedere ſub forma ſpiralis deberent: hoc vero cum ex antiquiſſimis obſervationibus non appareat, poſtulat vorticum hypotheſis, ut fluidum vorticoſum ponatur ſupra modum rarum atque ſubtile idque velocitate, quam mens humana vix aſſequi poſſit, motum: quo enim rarius fluidum, eo celerius motum fingas neceſſe eſt. Fortaſſe oportunius motuum perennitas explicabitur à communicatione quadam motus reciproca, ita ut quas modo corpus cœleſte propulſit particulas, ab his alio tempore vi ſimili propellatur.

§. 12. Venio jam ad reliquas corporum gravitantium proprietates, quæ ex hypotheſi vorticum ſequuntur. Ponamus itaque corpus in fluido vorticoſo quieſcens, quod nullas fluidi particulas per poros ſuos tranſmittat: ita tendet corpus verſus centrum vorticis, eritque vis ejus centripeta præciſe æqualis vi centrifugæ fluidi vorticoſi, quod ſub ſimili volumine in eadem à centro diſtantia poſitum ſit. Ergo corpora quæcunque in ſimili vorticis loco conſtituta eandem habent vim centripetam ſi idem habeant volumen, etiamſi quantitates materiæ in uno quoque corpore ſint utcunque inæquales, & ſi hujusmodi corpora libere verſus centrum vorticis moveri poſſint, ferentur velocitatibus inæqualibus reciproce ſcilicet proportionalibus quantitatum materiæ radicibus quadratis, ſi ſpatia emenſa ſint æqualia.

§. 13. Quæ in præcedente paragrapho monita ſunt, facile applicantur gravitati corporum, ſi modo principium gravitatis ſit vis centrifuga alicujus materiæ ſubtilis celerrime in vorticem actæ. Quia vero experientia docet omnia corpora terreſtria in vacuo ſimili deſcendere velocitate omniaque corpora è filo ſuſpenſa æquali vibrationes facere tautochronas, inde concludemus, *particulas ultimas graves*, per quas nempe fluidum gravificum penetrare nequeat, in omnibus corporibus terreſtribus eſſe æqualis denſitatis ſpecificæ, id eſt, ſub æqualibus voluminibus æquales *materiæ ſolidæ* quantitates continere, idque non minus in *particulis gravibus*, quæ aurum quam quæ plumas componunt. Ne

vero hæc ſecus ac volo explicentur dicendum mihi erit, quid intelligam *per ultimas particulas graves* & per *materiam ſolidam* ipſis inſitam.

§. 14. Sunt igitur *particulæ graves* proprie ſic dictæ illæ, quæ impenetrabiles ſunt materiæ ſubtili vorticoſæ: hujuſmodi enim particulæ idem faciunt, quod corpora in vortice poſita, de quibus §. 12. diximus: quamvis autem impenetrabiles ſint materiæ ſubtili modo dictæ, non crediderim tamen illas perfecte ſolidas, quales Hugenius præſumſiſſe videtur *in tract. ſuo de gravitate*, id eſt tales quorum ſpatium totum materia repletum ſit ſine poris aut fluido interfluo: exiſtimo potius has *particulas graves* ſuos rurſus habere poros, atque in illis fluidum aliud eſſe longum ſubtilius, quod particulas graves eadem libertate trajicit, qua fluidum gravificum fluit per corpora ſenſibilia: reſiduum vero quod in *particulis gravibus* ſibi cohæret voco *materiam ſolidam* ad particulas easdem pertinentem.

§. 15. Perſpicuum ex his eſt, diverſas corporum gravitates ſpecificas minime petendas eſſe ex diverſa denſitate *particularum gravium*, ſed ex eo, quod hæ particulæ poſſint eſſe in diverſis corporibus ſub eodem volumine numero inæquales, aut etiam magnitudine, ſic ut in corporibus compactioribus majorisve gravitatis ſpecificæ *particulæ graves*, vel minoribus interſtitiis poſitæ vel volumine majores ſint.

Etſi vero diverſas denſitates ſpecificas habuiſſent *particulæ graves* in diverſis corporibus, non propterea diverſas habitura fuiſſent gravitates ſpecificas corpora cæteris poſitis paribus: talia autem corpora ex alto delapſa diverſa inter ſe velocitate fuiſſent deſcenſura verſus centrum terræ: Fieri itaque potuiſſet, ut corpora æqualis gravitatis ſpecificæ, vel in vacuo communiter ita dicto inæquali velocitate deſcendiſſent non minus atque corpora videmus diverſæ gravitatis ſpecificæ æquali velocitate deſcendentia: In hujuſmodi autem corporibus leges motuum longe aliæ forent, atque nunc ſunt, ubi maſſæ ex ſolis ponderibus æſtimantur.

§. 16. Cæterum quia omnia, quantum experientia conſtat, corpora terreſtria habent ſuas *particulas graves* æqualis denſitatis ſpecificæ, ut §. 13. monitum fuit, facile quidem inducar, ut credam idem in omnibus planetis fieri ſeorſim conſideratis: Planetas vero inter ſe comparatos *particulas* ſuas *graves* diver-

verſæ habere denſitatis ſpecificæ mihi admodum eſt probabile, quia nullam video rationem, cur in omnibus planetis ſimiles eſſe debeant iſtæ particulæ. Sed à *particularum gravium* denſitate in quolibet planeta pendet hujus vis centrifuga ſeu conatus recedendi à ſole. Igitur nondum licet colligere *planetarum vires centrifugas ſe habere, in ratione quadrata reciproca eorundem diſtantiarum à ſole ex eo, quod tempora periodica rationem ſequantur ſeſquiplicatam diſtantiarum:* talis enim concluſio ſupponit ſimilem in omnibus planetis *particularum gravium* denſitatem.

§. 17. Planetarum vires centrifugæ æquales utique ſunt viribus contrariis quibus verſus ſolem trahuntur: Quia autem, ut dixi in ſuperiori paragrapho, nondum certum eſt, in quanam ratione reſpectu diſtantiarum à ſole vires planetarum centrifugæ mutentur, ideo neque de eorum viribus gravitatis verſus ſolem aliquid certi ſtatuere licet; Et plurima quidem ſunt in vorticum hypotheſi, quæ vires gravitatis in diverſis diſtantiis conſtituunt & determinant.

Cum enim vis gravitatis ſit æqualis vi centrifugæ materiæ ſubtilis, quæ particulas corporis graves penetrare nequit, ſequitur eo majorem eſſe vim gravitatis, quo majori materiæ ſubtilis quantitati tranſitus negatur; quia vero ſcimus corpus ſæpe fluido uni impenetrabile eſſe, quod alii fluido ſubtiliori liberrimum concedit transfluxum, fieri poteſt, ſi modo materiam vorticoſam in diverſis à centro vorticis diſtantiis inæqualiter ſubtilem putemus, ut unus idemque planeta in inæqualibus à ſole diſtantiis inæqualiter ad ſolem pellatur, quod idem facilius contingere poteſt in diverſis planetis, quia accedit diverſa quæ eſſe poteſt particularum gravium, ſtructura.

Præter hæc ſunt etiam diverſa materiæ vorticoſæ denſitas, velocitas diſtantiaque à centro, quæ concurrunt ad vim gravitatis formandam. Si vero eorum ratio habeatur, apparebit poſſe quidem vires gravitatis decreſcere creſcentibus diſtantiis à centro virium, neque tamen propterea vires centrifugas æqualium materiæ vorticoſæ voluminum pariter decreſcere, quod poſterius ob rationem §. 6. expoſitam fieri non poſſe exiſtimo.

Iſta vero quæ generaliter & obiter diſputavimus de natura vorticum eorumque ad Phænomena gravitatis applicatione, ſufficiant: animus non fuit

vorticum commendare hypotheſin, ſed quasdam tantum inde concluſiones facere, ſine quibus ipſam hypotheſin ſubſiſtere non poſſe crediderim.

Venio jam ad alteram ſectionis partem, qua breviter conſiderabimus ſtatum fluidorum, quæ intra vaſa mota continentur: Argumentum eſt fertiliſſimum infinitiſque modis variabile: Sed pauca attingemus, ceu exempla, ad quæ multa alia revocari poterunt.

§. 18. Si aqua in vaſe perforato contineatur ipſumque vas libere cadat, ex ſe patet, nihil aquæ durante vaſis lapſu eſſe effluxurum, quia nempe particulæ ſuperiores non gravitant in inferiores: Si vas motu quidem accelerato deſcendat ſed tardiore quam quo corpora naturaliter in vacuo accelerantur, effluet aqua, ſed minori velocitate ac ſi vas quiescat: Contrarium erit, ſi vas motu accelerato ſurſum trahatur: Denique ſi vas horizontaliter accelerato motu feratur (jam enim ad reliquas non attendemus directiones) fieri poteſt, ut velocitas aquæ effluentis major ſit vel minor velocitate ordinaria pro ratione ſitus foraminis: Velocitates autem aquæ ſic determinabuntur.

Fig. 67. §. 19. Sit v. gr. cylindus ACDB (Fig. 67.) aqua plenus usque in AB, cujus fundum CD foramen habeat in E valde parvum per quod aquæ effluant, dum interea totum vas ſurſum trahatur à pondere P deſcendente mediante funiculo ſuper duabus trochleis H & G excurrente. Denique conſtanter tantum aquæ ſuperius affundi ponatur, quantum effluit per foramen E: pondus vero cylindri & aquæ in eo contentæ indicetur per p. Ita apparet quamlibet guttam aquæ in vaſe veluti ſtagnantis vi animari ad aſcenſum quæ ſe habeat ad vim gravitatis naturalem ut $\frac{P-p}{P+p}$ ad 1: Quia vero reactio guttulæ in fundum æqualis eſt vi, qua ad aſcenſum animatur quævis guttula, præter preſſionem naturalem aliam exeret in fundum, quæ exprimenda erit per $\frac{P-p}{P+p}$. Utraquè vero preſſio ſimul ſumta erit ad preſſionem ſolam naturalem ut $\frac{2P}{P+p}$ ad 1, adeo ut fundum haud ſecus ab incumbente aqua prematur, quam ſi cylindrus quieſceret eſſetque altitudo aquæ $= \frac{2P}{P+p} \times AC$, ex quo ipſo ſequitur altitudinem velocitati aquæ uniformiter effluentis debitam eſſe $= \frac{2P}{P+p} \times AC$.

Igitur

Igitur ſi P $= o$, nulla effluet aqua, cadente vaſe motu naturaliter accelerato: ſi P $= p$, effluet aqua, velocitate ordinaria, quia tunc vas quieſcit; atque ſi P $= \infty$, erit velocitas aquæ effluentis ad velocitatem ordinariam ut $\sqrt{2}$ ad 1.

§. 20. Quæritur nunc quid accidere debeat fluido, quod in vaſe continetur, cui motus horizontalis uniformiter acceleratus imprimitur. Id vero facillimum eſt videre ex hoc ſolo, quod nunc inertia particularum ceu directioni, ſub qua vas movetur, contraria ſit horizontalis, dum gravitatis earundem eſt verticalis: Utraque vero manet conſtanter eadem.

Igitur poſtquam fluidum ad ſtatum durationis ſeu *permanentiæ* pervenit, ſuperficies ejus plana erit, ſed inclinata verſus plagam motus. Angulus autem inclinationis determinabitur ut ſequitur.

Sit vas cylindricum A C D L (Fig. 68.) verticaliter poſitum, quod ſuper plano horizontali C D H, mediante pondere P ope trochleæ G vaſi annexo in S movetur motu uniformiter accelerato, ſitque pondus vaſis & aquæ in illo contentæ ad pondus P ut p ad P: gravitatio naturalis $= 1$; eritque niſus cujuslibet guttulæ in directione G S ratione ſuæ gravitationis $= \frac{P}{P+p}$: Igitur ſi A B ſit in eodem plano cum S G & cum ſuperficie aquæ, ducaturque A L, patet actionem gravitatis naturalis fore ad reactionem à pondere P oriundam, ut B L ad A L ſeu ut 1 ad $\frac{P}{P+p}$: vocatoque ſinu toto 1, fore ſinum anguli Fig. 68.

$$LAB = \frac{P}{\sqrt{(2PP + 2Pp + pp)}}.$$

Hinc etiam intelligitur fundum C D majorem ab incumbente aqua preſſionem pati in C quam in D, idque in ratione altitudinum A C & B D: ſique idem fundum perforetur minimo foraminulo, aquam ejectum iri velocitate, quæ reſpondeat altitudini columnæ verticalis ſuperincumbentis. Ita vero erit, poſtquam omnia jam ad ſtatum *permanentiæ* pervenerint; ſi pondus P veriabile ſit, nunquam in eodem ſitu permanebit ſuperficies A B: à pondere autem iſto pendet velocitas, qua vas movetur in ſingulis locis. Igitur ſi totum pondus auferatur, poſtquam vas jam motum acquiſiverit, per-

get vas ſuâ velocitate moveri, ſuperficies autem aquæ declivitatem deponet, rurſusque ad ſitum horizontalem componetur, veluti ſi quieſcat vas; in his adeoque caſibus non eſt vaſis motus, qui fluidorum ſtatum permutet, ſed motus variatio.

§. 21. Quod in præcedente paragrapho monuimus de vaſe cylindrico verticaliter poſito facile extenditur ad vas cujuscunque figuræ: qualis enim eſt inclinatio ſuperficiei aqueæ A B ad horizontem in vaſe cylindrivo, talis erit in omnibus reliquis vaſis: preſſio autem aquæ in latera vaſis ubique definietur, ſi columna concipiatur verticalis ab eo puncto, pro quo preſſio aquæ definienda eſt, usque ad ſuperficiem aquæ, quæ cogitatione producenda erit, ſi id opus fuerit. Si loco vaſis ſumatur v. gr. tubus ab utraque parte inflexus, veluti A C D L (Fig. 69.) isque moveatur in directione C D, tum utraque ſuperficies M, N ſitum mutabit in A, B, donec recta A B debitam obtineat inclinationem antea definitam; fieri etiam poteſt ut pars aquæ efflat per A, priusquam æquilibrium adſit: ſi crus D L deorſum ſpectet, ut in figura 70. aqua manebit veluti ſuſpenſa: in utroque enim caſu inclinatio lineæ A B cæteris paribus eadem erit.

Fig. 69.

In figura autem 69. erit linea M A eo major, quo longius eſt crus horizontale C D: ſic ut minimæ accelerationes aut etiam retardationes obſervari poſſint, quod ſæpe aliis rebus inſervire poteſt, veluti dignoſcendis accelerationibus navium, niſibusque quos exercent ſingulis remorum ſubmerſionibus remiges; in his tamen caſibus, quia non poteſt ſtatus ſupponi durationis ſeu *permanentiæ*, omnis fluidi motus, qui ſingulis vicibus replicatur, eſſet inquirendus.

Facit eadem hæc ratio, ut nondum liceat omnino ex præmiſſis determinare, quid fieri debeat cum vaſa fluidum continentia percutiuntur.

Poſſunt autem regulæ percuſſionum ex ordinariis legibus preſſionum deduci, quandoquidem percuſſio nihil aliud ſit, niſi ingens preſſio parum durans.

Fig. 71. §. 22. Sit v. gr. tubus cylindricus horizontaliter ſitus A B C D (Fig. 71.) aqua plenus, impingatque globus P in tubi prominentiam A P: tunc aqua ſubito premet vehementer fundum B A verſus P: ut hanc preſſionem recte in-

intelligamus, ponemus primo nullum ineſſe pondus tubo: ita apparet ex æqualitate inter actionem & reactionem fundum durante globi impulſu non aliter impelli ab aqua, quam pelleretur in contrariam partem à globo, ſi hic immediate in fundum impingat. Si vero pondera aquæ & tubi rationem habere ponantur ut p ad π, diminuetur impulſus aquæ in fundum, eritque impulſus totus ad impulſum reſiduum ut $p + \pi$ ad p; diſtribuitur enim impulſus æqualiter in omnem tum aquæ tum tubi materiam, ſolumque fluidum in fundum reagit.

Nunc autem in fundo B A parvulum fingamus foramen m, ſed per id tamen aqua liberrime fluere putetur; ita intelligimus, particulam aquæ per foraminulum m ejectum iri durante impulſu; neque tamen quantitas iſtius aquæ determinari poterit; pendet enim à rigiditate materiæ A P impulſum recipientis: ſi nempe materia iſta rigidiſſima ſit, fortior preſſio ſubſtituenda eſt impetui, ſed minus durans; conſideretur v. gr. idem impetus in duobus diverſis caſibus: ſit autem in uno preſſio quadrupla, in altero duratio preſſionis quadrupla, quod fieri poteſt cum materia rigidior eſt in caſu priori quam poſteriori: ita effluet in impulſu preſſionis minoris magisque durantis dupla circiter quantitas quam in altero. Poſſunt hoc modo rigiditates materiarum explorari: ſed poſſunt etiam ex ſono.

HYDRO-

HYDRODYNAMICÆ
SECTIO DUODECIMA.
Quæ ſtaticam fluidorum motorum, quam hydraulico-ſtaticam voco, exhibet.

§. I.

INter eos, qui preſſionis fluidorum intra vaſa ſubſiſtentium menſuras dederunt, pauci regulas Hydroſtaticæ vulgares, quas in *ſectione ſecunda* demonſtravimus, transgreſſi ſunt: multa tamen alia ſunt, quæ ad Hydroſtaticam proprie ſic dictam pertinent, veluti cum actioni gravitatis vis centrifuga conjuncta eſt, aut vis inertiæ, quod utrumque in præcedente ſectione commentati ſumus: poſſentque hujusmodi vires mortuæ excogitari & combinari infinitis aliis modis. Non vero hæc ſunt, quæ maxime deſideranda mihi videntur: cum difficile non ſit regulas ad id negotium dare generales. Deſidero potius fluidorum ſtaticam, quæ intra vaſa moventur motu progreſſivo, veluti aquarum per canales ad fontes ſalientes fluentium: multiplicis enim uſus eſt, nec ab ullo tractata aut ſi qui mentionem de illa feciſſe dici poſſunt, ab his minime rectè fuit explicata: qui enim de preſſione aquarum per aquæ ductus fluentium horumque requiſita firmitate ad preſſionem illam ſuſtinendam dixerunt, non alias, quam pro fluidis nullo motu latis leges tradiderunt.

§. 2. Singulare eſt in iſta *hydraulico-ſtatica*, quod niſus aquarum prius definiri non poſſit, quam motus recte fuerit cognitus, quæ ratio eſt, quod tam diu latuit hæc doctrina; parum enim ſolliciti hactenus fuerunt Auctores in motu aquarum diſquirendo, & velocitates ubique fere ex ſola aquæ altitudine æſtimarunt: quamvis autem ſæpe motus tam cito ad hanc velocitatem tendat, ut accelerationes ſenſibus plane diſtingui nequeant, & in inſtanti omnis motus generari videatur, intereſt tamen, ut hæ accelerationes recte intelligantur, quia aliter preſſiones aquarum fluentium definiri ſæpe non poſſunt, proptereaque exiſtimavi, rem eſſe maximi momenti à motus principio usque ad datum terminum mutationes illas utcunque *momentaneas*

omni

omni cura perpendere, experimentiſque confirmare, quod paſſim in hoc tractatu, præſértim autem in ſectione tertia, feci.

§. 3. Si ubique motus definiri poſſet, facile foret ſtaticam in fluidis motis generaliſſimam formare: ſi enim foramen, ſed id infinite parvum fingas, eo ipſo in loco pro quo preſſio aquarum deſideratur, quæres primo quanta velocitate aquæ per illud foraminulum ſint erupturæ & cui altitudini illa velocitas debeatur: intelligis autem huic ipſi altitudini proportionalem eſſe preſſionem, quam quæris.

Ex hoc principio petenda eſt preſſio quam ſuſtinet lamina horizontalis L Q in figura quadrageſima tertia, ſi perforata non fuerit: poſtquam enim demonſtratum à nobis fuit in corollario ſecundo paragraphi trigeſimi primi Sectionis octavæ, ſi foraminulum H infinite parvum fuerit ratione foraminum M & N: ratioque horum foraminum M & N indicetur per α & γ, fore altitudinem velocitati aquæ per H erumpentis debitam $= \frac{\alpha\alpha \times LB - \gamma\gamma \times NQ}{\alpha\alpha + \gamma\gamma}$, inde judicabimus niſum aquæ in laminam L Q non perforatam huic ipſi altitudini proportionalem eſſe: quod idem alio modo demonſtratum dedimus in paragrapho decimo nono citatæ Sectionis: Hinc ſequitur fieri poſſe, ut lamina L Q nullam preſſionem patiatur, quantumvis magna ſupra eam fuerit altitudo aquæ, ſcilicet quando $\gamma = \alpha \surd (LB:NQ)$, imo preſſionem in ſuctionem mutari poſſe.

§. 4. Similiter obtinetur preſſio aquæ in laminam L Q, ſi vel hæc perforata fuerit foramine finitæ ratione amborum reliquorum magnitudinis. Si enim foraminulo infinite parvo lamina præter illud, quod eſt in H, perforata fuerit, non poteſt non velocitate communi aqua per utrumque erumpere: Et cum hæc velocitas cognita ſit (per §. 30. Sect. 8.) pro foramine H, habetur quoque velocitas, qua aqua per foraminulum, quod nempe concipimus, erumpere debeat, atque ſic preſſionem aquæ cognoſcimus. Fuerint v. gr. foramina M, H & N inter ſe æqualia, altitudo autem B L habuerit ad altitudinem L Q rationem ut 10 ad 3, erit preſſio in laminam L Q ſubdecupla illius, quæ eſt obturatis foraminibus H & N.

Denique ſi in alio loco preſſionem aquæ deſideres, addes ſaltem altitudinem, qua lamina L Q ſupra illum locum eminet, altitudini jactus per ori-

ficium H. Eadem methodus inſervit ad preſſiones aquarum in reliquis vaſis, quæ in Sectione octava tractavimus, determinandas. Differunt autem omnes hæ quæſtiones ab iis, quæ ad motum fluidorum per canales pertinent, quod aquæ ob infinitam vaſorum à nobis poſitam amplitudinem veluti quieſcant in cavitatibus & nihilominus preſſionem longe aliam exerceant, quam aliter ſolent. In canalibus autem aquæ preſſionem ſuam eo magis mutant, quo majori velocitate præterfluunt, & omnem fere conſuetam preſſionem exerunt, ſi velocitas iſta ſit valde parva.

Hæc ita, cum velocitates fluidorum determinari poſſunt per methodos jam ſuprà à nobis traditas. Singulari autem methodo res pertractanda eſt, cum aquæ per canales fluunt, hancque doctrinam potiſſimum titulo *hydraulico-ſtaticæ* intelligo: Hic non tam preſſio ex velocitate quam reciproce velocitas, ſi foraminulum in lateribus canalis fiat, ex preſſione definiri poteſt. Et de iſta *hydraulico-ſtatica*, cujus uſus ampliſſimus eſt, in præſenti ſectione potiſſimum agere conſtitui.

Problema.

Fig. 72. §. 5. Fuerit vas ampliſſimum ACEB (Fig. 72.) aqua conſtanter plenum conſervandum, tubo inſtructum cylindrico & horizontali ED; ſitque in extremitate tubi foramen *o* aquas velocitate uniformi emittens; quæritur preſſio aquæ in latera tubi ED.

Solutio.

Sit altitudo ſuperficiei aqueæ AB ſupra orificium $o = a$; erit velocitas aquæ in *o* effluentis, ſi prima fluxus momenta excipias, uniformis cenſenda & $= \sqrt{a}$, quia vas conſtanter plenum conſervari aſſumimus; poſitaque ratione amplitudinum tubi ejusque foraminis $= \frac{n}{1}$, erit velocitas aquæ in tubo $= \frac{\sqrt{a}}{n}$: Si vero omne fundum FD abeſſet, foret velocitas ultima aquæ in eodem tubo $= \sqrt{a}$, quæ major eſt quam a; Igitur aqua in tubo tendit ad majorem motum, niſus autem ejus ab appoſito fundo FD impeditur: Ab hoc niſu & reniſu comprimitur aqua, quæ ipſa compreſſio coërcetur à lateribus tubi, hæcque proinde ſimilem preſſionem ſuſtinent. Apparet ſic preſſionem

la-

laterum proportionalem eſſe accelerationi ſeu incremento velocitatis, quod aqua ſit acceptura, ſi in inſtanti omne obſtaculum motus evaneſcat, ſic ut immediate in aërem ejiciatur.

Res igitur jam eo perducta eſt, ut ſi durante fluxu aquæ per o, tubus E D in temporis puncto abrumpatur in cd, quæratur quantam accelerationem guttula $acbd$ inde ſit perceptura: tantam enim preſſionem ſentiet particula ac in lateribus tubi ſumta à præterfluente aqua: Hunc in finem conſiderandum eſt vas ABEcdC, atque pro eo invenienda acceleratio particulæ aqueæ effluxui proximæ, ſi hæc habuerit velocitatem $\frac{\surd a}{n}$: Iſtud negotium fecimus generaliſſime in *paragrapho tertio ſect. V.* Attamen quia in hoc caſu particulari brevis eſt calculus, motum in vaſe decurtato ABEcdC hic iterum calculo ſubducemus.

Sit velocitas aquæ in tubo Ed, quæ nunc ut variabilis conſideranda eſt, $= v$: amplitudo tubi ut antea $= n$, longitudo E$c = c$: indicetur longitudo ac particulæ aqueæ infinite parvæ & effluxui proxime per dx: Erit guttula æqualis in E tubum ingreſſura eodem temporis puncto quo altera $acdb$ ejicitur: dum autem guttula in E, cujus maſſa $= ndx$, tubum ingreditur acquirit velocitatem v, atque *vim vivam* $nvvdx$, quæ *vis viva* tota fuit de novo generata; nullum enim, ob amplitudinem vaſis A E infinitam, motum guttula in E habuit tubum nondum ingreſſa: huic *vi vivæ* $nvvdx$ addendum eſt incrementum *vis vivæ*, quod aqua in Eb accipit, dum guttula ad effluit, nempe $2ncvdv$: aggregatum debetur *deſcenſui actuali* guttulæ ndx per altitudinem BE ſeu a: habetur igitur $nvvdx + 2ncvdv = nadx$ ſive $\frac{vdv}{dx} = \frac{a-vv}{2c}$.

In omni autem motu eſt incrementum velocitatis dv proportionale preſſioni ductæ in tempuſculum quod hic eſt $\frac{dx}{v}$: igitur in noſtro caſu eſt preſſio, quam guttula ad patitur, proportionalis quantitati $\frac{vdv}{dx}$, id eſt, quantitati $\frac{a-vv}{2c}$.

Eſt vero in eo temporis puncto, quo tubus abrumpitur, $v = \frac{\surd a}{n}$ vel $vv = \frac{a}{nn}$, hic igitur valor ſubſtituendus eſt in expreſſione $\frac{a-vv}{2c}$, quæ

 ſic

ſic abit in hanc alteram $\frac{nn-1}{2nnc}a$. Et hæc eſt quantitas, cui preſſio aquæ contra particulam tubi ac proportionalis eſt, quamcunque amplitudinem tubus habuerit, aut quocunque foramine ipſius fundum perforatum fuerit. Igitur ſi in unico caſu preſſio aquæ cognita fuerit, innoteſcet ſimul in omnibus reliquis: talem autem habemus, nempe cum foramen eſt infinite parvum aut n infinite magna ratione unitatis: tunc enim ex ſe patet, aquam exercere integram ſuam preſſionem, quæ toti altitudini a convenit, hancque preſſionem deſignabimus per a: ſed quando n eſt infinita, evaneſcit unitas præ numero nn, fitque quantitas cui preſſio eſt proportionalis $= \frac{a}{2c}$: Ergo ſi generaliter ſcire velimus, quanta ſit preſſio cum n eſt numerus qualiscunque, talis inſtituenda eſt analogia. Si quantitati $\frac{a}{2c}$ convenit preſſio a, quænam erit preſſio pro quantitate $\frac{nn-1}{2nnc}a$: Et ſic invenitur preſſio quæſita $= \frac{nn-1}{nn}a$. Q. E. I.

Corollarium 1.

§. 6. Quia litera c ex calculo abiit, ſequitur omnes partes tubi, tam eæ quæ ſunt vaſi A G propiores, quam quæ remotiores, æqualiter ab aqua præterfluente premi, & quidem minus quam partes fundi C G: differentiamque eo majorem eſſe, quo majus ſit foramen o: nullamque amplius preſſionem ſuſtinere latera tubi, ſi in hoc omnis obex F D abſit, ſic ut pleno orificio aquæ effluant.

Corollarium 2.

§. 7. Si alicubi foraminulo minimo, & quidem tali ratione foraminis o, perforetur tubus, exiliet aqua velocitate, qua ad altitudinem $\frac{nna-a}{nn}$ aſcendere poſſit, ſi modo impedimenta aliena nihil obſtent: Erit nempe altitudo jactus, in figura 73, ſeu $ln = \frac{nna-a}{nn}$. Si vero tubulus adſit verticalis, aut etiam utcunque inclinatus gm, communicans cum tubo horizontali, ſed ita tamen, ut extremitas tubuli inſerti non promineat intra cavitatem tubi horizontalis, ne aqua præterfluens illidat in illam extremitatem, erit altitudo aquæ ver-

verticalis gh in tubo inſerto hærentis pariter æqualis $\frac{nna-a}{nn}$: neque neceſſe eſt in hoc poſteriori caſu, ut tubulus gm ſit admodum ſtrictus.

Scholium.

§. 8. Poterit ergo hæc theoria experimento confirmari facillimo, eo majoris futuro momenti, quod nemo adhuc hujusmodi æquilibria, quorum uſus latiſſime patet, definiverit: quod eadem methodo niſus aquarum per canales fluentium generaliſſime obtineri poſſit pro aquæ ductibus utcunque inclinatis, incurvatis, amplitudinisque variatæ ac velocitate aquarum qualicunque; tum etiam, quod nonſolum hæcce preſſionum, ſed tota inſuper motuum theoria, quam ſupra dedimus, hujusmodi experimentis confirmetur, quia arguunt, recte à nobis definitas fuiſſe accelerationes aquarum. Curandum autem eſt in experimento, ut tubus horizontalis ſit interius bene politus, perfecte cylindricus atque horizontalis: ſitque ſatis amplus, ut ab adhæſione aquæ ad latera tubi notabile motus decrementum oriri non poſſit: vas ipſum ſit ampliſſimum atque continue plenum conſervetur. Obſervandum quoque eſt, quanta ſit virtus tubulo vitreo gm aquas ſtagnantes elevandi, quæ virtus omnibus tubis capillaribus aut admodum ſtrictis ineſt: hæc enim elevatio ab altitudine gh eſt ſubtrahenda: aut potius aſſumendus eſt tubus æqualis craſſitiei & obturato orificio o, notandum eſt punctum m, tumque fluxu aquis conceſſo notandum quoque eſt punctum h: erit autem ſecundum theoriam deſcenſus $mh = \frac{1}{nn} \times a = \frac{1}{nn} \times EB$.

Tandem etiam attendendum eſt ad venam aquæ in o effluentis; hujus enim contractio etiam facit, ut aqua in tubo horizontali minori transfluat velocitate, quam $\frac{\surd a}{n}$. De iſta contractione eamque præveniendi modo egi in Sect. *IV*. His autem quamvis ita occurri poſſit incommodis, ut error ſenſibilis in experimento ſupereſſe nequeat, tamen ſi majorem adhibere velimus accurationem, experimento indaganda erit quantitas aquæ dato tempore effluentis, quæ cum amplitudine tubi comparata rectiſſime dabit velocitatem aquæ intra tubum fluentis, quam in calculo poſuimus $= \frac{\surd a}{n}$: Si vero experimento minor inventa fuerit, talis nempe, quæ debeatur altitudini b, tunc erit proxime preſſio aquæ præterfluentis $= a - b$.

Co-

Corollarium 3.

§. 9. Si orificium in *o* prius digito obturetur, poſteaque fluxus aquis concedatur, mutatur à primo fluxus momento preſſio *a* in preſſionem $\frac{nna-a}{nn}$: iſta vero preſſionum mutatio non fit in inſtanti; imo ſi accurate loquendum eſt, fit demum poſt tempus infinitum, quia, ut vidimus in ſectione quinta, omnis aquarum velocitas, quanta in calculo à nobis poſita fuit integræ altitudini *a* reſpondens, nunquam accurate adeſt: attamen incredibili acceleratione ſtatim poſt primas ejectas guttulas ad hanc velocitatem tendunt, ita ut totam, quantum ſenſibus dijudicari poteſt, ſine mora ulla ſenſibili acquiſiviſſe videantur, niſi prælongi ſint aquæ ductus, tum enim aquarum accelerationes oculis diſtincte dijudicari poſſunt, cujus rei exemplum dedi in Sect. *V*. §. 13. In his igitur canalibus aquas ex caſtello longiſſime ſito ad fontem ſalientem ducentibus, ſi preſſiones alicubi experimento explorentur eo quo ſupra dixi modo, invenietur preſſionem celeriter quidem, nec tamen in inſtanti diminui, preſſionumque intervalla dignoſcere licebit.

Ut vero generaliter niſus aquarum definiatur, ponenda eſt, pro *v* ea velocitas, quam aqua eo ipſo in loco temporisque puncto, quibus niſus deſideratur, habet, ſique ea velocitas convenire intelligatur altitudini *b*, erit niſus aquarum $= a - b$. Unde collatis cum præſentibus his quæ in ſectione quinta tradita fuerunt, definire licebit quanta ſingulis momentis preſſio futura ſit.

Ex his non obſcurum eſt prævidere leges hujuſce *hydraulico-ſtaticæ*, ſi & figura vaſis & aquarum per canales transfluentium velocitas pro lubitu fingantur qualeſcunque. Erit nempe preſſio aquarum conſtanter $= a - b$, ubi per *a* intelligitur altitudo debita velocitati, quacum aqua abrupto canali vaſeque conſtanter pleno conſervato poſt tempus infinitum effluxura ſit, & per *b* altitudo debita velocitati, qua cum aqua actu transfluit. Mirum ſane eſt ſimpliciſſimam hanc regulam, quam natura affectat, adhuc latere potuiſſe. Jam igitur illam demonſtrabo expreſſius.

Problema.

§. 10. Invenire preſſionem aquæ, per canalem utcunque formatum atque inclinatum, velocitate quacunque fluentis uniformi.

Solu-

Solutio.

Sit canalis A C D (Fig. 74.) per cujus foramen o transfluere ponantur Fig. 74.
aquæ velocitate uniformi & tali quæ debeatur altitudini verticali oS : ducatur S N & fingatur vas infinite amplum N M Q P aquis plenum usque in N P, ex quo canalis aquas ſuas perpetuo & æquabiliter hauriat: hæc ideo ſic fingo, ut cauſa adſit ſeu vis propellens uniformis, quæ aquas data velocitate propellat ſeu fluxum aquarum conſervet æquabilem : Et ſine hac hypotheſi problema noſtrum foret indeterminatum, quia velocitas eadem in eodem canali infinitis modis ad temporis punctum generari poteſt & propterea, ut habeatur menſura cauſæ aquas propellentis, fingenda eſt uniformitas in motu aquarum.

Fuerit nunc aquarum preſſio definienda in C F (aut cf): huncque in finem putabimus rurſus abrumpi canalem in C E (aut ce) ſectione ad canalem perpendiculari examinaturi , quamnam accelerationem retardationemve guttula C E G F (vel $cegf$) poſt primum rupturæ momentum receptura ſit: quâ de cauſa generaliter motum *momentaneum* per vas decurtatum N M E C A Q P (vel N M ce A Q P) definiendum habemus. Sit igitur velocitas guttulæ infinite parvæ C E G F (ſeu $cegf$) ipſo decurtationis puncto $= v$: maſſa ejus $= dx$: erit *vis viva* aquæ in vaſe decurtato motæ proportionalis quantitati vv, eamque proinde faciemus $= \alpha vv$, intelligendo per litteram α quantitatem quamcunque conſtantem, quæ pendet ab amplitudinibus canalis abrupti; præciſa autem ejus determinatio hic non requiritur. Notetur *vim vivam* aquæ in vaſe ficto N M Q P negligi ob infinitam ejus amplitudinem: nulla tamen ſi vel infinitæ non eſſet amplitudinis inde in calculo oritura fuiſſet variatio. Habemus jam incrementum *vis vivæ* aquæ in vaſe decurtato motæ $= 2\alpha v dv$, cui ſi addatur *vis viva* ſimul genita in guttula ejecta, oritur $2\alpha v dv + vv dx$, quod eſt incrementum *vis vivæ* totale, debitum *deſcenſui actuali* guttulæ dx per altitudinem verticalem aquæ ſupra punctum C (vel c,) quam deſignabimus per a: hinc igitur iſtud incrementum *vis vivæ* totale faciendum eſt æquale adx, ſic ut ſit

$$2\alpha v dv + vv dx = adx \text{ vel}$$

$$\frac{vdv}{dx} = \frac{a - vv}{2\alpha}.$$

Reliqua ſi fiant, ut in paragrapho quinto & ponatur velocitas v talis quæ debeatur altitudini b, invenietur preſſionem aquæ in C F (aut cf) tantam

eſſe,

eſſe, quanta in aqua ſtagnante ad altitudinem $a - b$. Ubi notari poteſt eſſe altitudinem b ad altitudinem oS, ſi nulla motus impedimenta aliena ſint, venaque effluens in o non contrahatur, in ratione quadrata foraminis o & ſectionis CE (aut ce).

Corollarium.

§. 11. Cùm b major eſt quam a, fit quantitas $a - b$ negativa atque ſic preſſio in ſuctionem mutatur, id eſt, latera canalis introrſum premuntur: tunc autem res ita conſideranda eſt, ac ſi loco columnæ aqueæ CT ſuperincumbentis & in æquilibrio poſitæ cum aqua præterfluente, ſit columna aquea appenſa ct, cujus niſus deſcendendi impediatur ab attractione aquæ præterfluentis: veluti ſi v. gr. amplitudo canalis ce æqualis ſit orificio o, tunc erit $b = oS$, nulla habita ratione motus impedimentorum *accidentalium*: hinc ſi tubulus ex canali deſcendat cr, hicque ſit aqua plenus à ſua origine c uſque in punctum t cum orificio o ad libellam poſitum, manebit aqua ct ſuſpenſa ſine motu: ſi verò punctum t infra o poſitum ſit, deſcendet aqua per tubulum cr, & effluet perpetuo in r, neque tamen ut facile quis exiſtimare potuiſſet nondum hâc viſa theoria, velocitas aquæ in r effluentis talis erit, quæ debeatur altitudini NP ſupra r, etiamſi omnia impedimenta auferantur, reſpondebit potius hæc velocitas, ſi modo tubulus admodum ſtrictus ſit ratione canalis, altitudini tr. Si punctum t altius poſitum ſit puncto o, aqua ſua ſponte aſcendet & cum omnis canalem ingreſſa erit, aër per tubulum attrahetur, moxque vena aquea in o effluens ab admixto aëre turbabitur pelluciditate atque ſoliditate orbata. Apparet igitur, quando preſſio futura ſit affirmativa & quando negativa: nempe eo major eſt in tubo preſſio, quo amplior eſt & quo humilius poſitus: Altitudo b eſt quidem in theoria $= \frac{1}{nn} \times oS$, ſi $\frac{1}{n}$ denotet rationem inter amplitudinem orificii & ejus tubi ſectionis, pro qua preſſio eſt definienda. Cum vero obſtacula notabiliter diminuunt motum, conveniet potius in æſtimandis preſſionibus, ut velocitas aquæ, qualis actu eſt, experimento cognoſcatur & altitudo illi velocitati debita pro b ſubſtituatur: ſimiliter accuratius æſtimabitur preſſio, ſi pro a non tam ponatur altitudo ſuperficiei aqueæ NP ſupra effluxus locum, quam altitudo velocitatis, quacum aquæ actu effluant ex canali eodem in loco abrupto: Hæ tamen correctiones non ſemper locum habent: Iſtam vero theoriam generalem jam exemplis quibuſdam illuſtrabo.

Exem-

Exemplum 1.

§. 12. Sit vas ABFG (Fig. 75.) ex cujus fundi medio deſcendit tubus DE formam habens coni truncati inferiora verſus divergentis: Affundantur perpetuo aquæ in AG, ita ut ſic vas plenum conſervetur. Fig. 75.

Sit autem altitudo ſuperficiei aqueæ ſupra orificium E $= a$, & ſupra D (qui locus eſt pro quo preſſio aquæ quæritur) $= c$: amplitudo orificii in E $= m$; & amplitudo ſeu ſectio horizontalis in D $= n$. Erit preſſio aquæ in D $= c - \frac{mm}{nn} a$, quæ quantitas vi hypotheſium eſt negativa, ſic ut latera canalis introrſum premantur à columna aquea altitudinis $\frac{mm}{nn} a - c$.

Igitur ſi concipiatur tubus incurvus DLN alteri DE inſertus, erit aqua præterfluens in D in æquilibrio cum aqua DLN, quando altitudo D ſupra N eſt $= \frac{mm}{nn} a - c$. Si altitudo hæc minor eſt, ſua ſponte aqua aſcendet nec aſcendere deſinet, quamdiu aquis orificium N ſubmerſum eſt, ita ut ſic aquæ ex loco humiliori in ſublimiorem ſine ulla vi externa elevari poſſint, ſi in AG aquæ ſufficiente copia affluant. At vero cum altitudo verticalis D ſupra N major eſt quam $\frac{mm}{nn} a - c$, aſcendet aqua in crure LN, donec illi fuerit æqualis.

Cæterum hic in memoriam revocandum eſt, quod paſſim monui experientiam docere, nempe multum abeſſe quominus aquæ per tubos à vaſe, cui implantati ſunt, divergentes tota ſua velocitate, quam vi theoriæ obtinere deberent, effluant; cujus rei rationes indicavi *paragrapho* 26. *Sect.* 3.

Fit inde ut altitudo D ſupra N admodum minor ſit, quam vi theoriæ expoſita eſſe deberet: Error corrigetur ſi loco $\frac{mm}{nn} a$ ponatur altitudo velocitatis, quam aqua in D habet; quæ altitudo per experimentum de quantitate aquæ dato tempore effluentis ſumtum obtinetur.

Exemplum 2.

§. 13. Si ſimili vaſi appenſus ſit tubus verticalis, qualis repræſentatur in Fig. 76. per CE, in quo amplitudines ubique rationem habeant inverſam Fig. 76.

 ſub-

ſubduplicatam altitudinum aquæ ſuperincumbentis, tubus iſte nihil afficitur ab aqua præterfluente, neque ullibi vel preſſionem ſive ſuctionem ſuſtinet.

Sequitur inde figuram naturalem fili aquei verticalis, quamdiu hoc contiguum eſt, eandem eſſe, quæ tubi CFE, quod & ratio & experientia confirmat: filum autem eo citius attenuabitur quo minor eſt altitudo ſuperficiei aqueæ ſupra orificium C, ſeu quo tardius effluunt aquæ: apparet filum aqueum ejus eſſe indolis, ut eadem aquæ quantitas per ſingulas ſectiones transfluat, nec velocitas ullibi mutetur, ubicunque filum abrumpatur, quæ eadem proprietas etiam in tubum CFE cadit, adeo ut rectiſſime hæc inter ſe conveniant.

Exemplum 3.

§. 14. Devehantur aquæ è caſtello per canalem, in cujus fundum foramen ſit per quod aquæ veluti in fonte ſaliente verticaliter exiliant, dico preſſionem aquæ in ſingula canalis puncta ubique æqualem fore, ſi amplitudines ejus ſint reſpective ut $\sqrt{\frac{a}{x-b}}$, ubi a exprimit altitudinem aquæ in caſtello ſupra orificium effluxus; x altitudinem ejuſdem aquæ ſupra locum ad libitum in canali ſumtum & b altitudinem arbitrariam conſtantem, & tunc fore ubique preſſionem aquæ fluentis ad preſſionem aquæ ſtagnantis ut b ad a. Quia vero cæteris paribus canales ampliores minus rupturæ reſiſtunt quam ſtrictiores, & id quidem in ratione radiorum ſeu quia conatus aquæ ad canalem rumpendum cæteris paribus rationem ſequitur ſubduplicatam amplitudinum, patet canalem idem rupturæ periculum in ſingulis locis ſubiturum eſſe, ſi amplitudo (y) ratione orificii aquas ejicientis (1) ubique ſequatur legem hujus æquationis

$$\left(x-\frac{a}{yy}\right)\sqrt{y}=b \text{ vel}$$

$$xxy^4-bby^3-2axyy+aa=0.$$

In canali per totum ſuum tractum æquabilis amplitudinis aquarum niſus ad rumpendum canalem ubique proportionalis erit firmitati canalis, ſi craſſities laterum canalis rationem ſequatur ut $x-\frac{a}{mm}$, intellecta per m amplitudine canalis ratione orificii (1).

Exem-

Exemplum 4.

§. 15. Fieri poteſt, ut altitudo ſuperficiei aqueæ ratione loci, pro quo preſſio indaganda eſt, ſit negativa, veluti in ſiphonibus recurvis aquas ex vaſe uno in aliud humilius poſitum ducentibus: Tuncque preſſio fit duplici titulo negativa, nempe $= - a - b$, denotante a altitudinem loci ſupra ſuperficiem aquæ & b altitudinem velocitati aquæ in illo loco debitam.

Iſta vero ſufficient, ut puto, ad recte intelligendam fluidorum motorum ſtaticam: Venio jam ad alia quædam phænomena, quorum ſolutio ab iſtis, quas dedimus modo, regulis pendet.

§. 16. In Sectione tertia §. 25. mentionem feci cohæſionis aquæ per tubos fluentis: veras autem iſtius cohæſionis menſuras ubique definire res eſt, quæ ſine iſta præmiſſa *hydraulico-ſtatica* expediri nequit: neque enim altitudines conſideraſſe verticales ſupra orificium effluxus ſufficit, ut vulgo putatur, ſed oportet etiam noſſe velocitates aquis convenientes, hæque cognoſcuntur ex amplitudinibus. Ut vero ſtatim appareat lex generalis in definienda vi cohæſionis ſeu conatu, quo fluida ad mutuam ſeparationem ſolicitantur, dico illam vim cohæſionis æqualem eſſe vi, qua latera canalis introrſum premuntur, quam definivimus §. 10. Propoſitio hæc alia demonſtratione egere mihi non videtur; prouti enim compreſſio aquæ, ſeu vis quâ ejus partes ad ſe invicem comprimuntur, æqualis eſt ſuperincumbenti columnæ aqueæ ſtagnanti, ita viciſſim conatus fluida ſeparandi æqualis cenſendus eſt appenſæ columnæ verticali aqueæ ſtagnanti, quæ cum aquis præterfluentibus in æquilibrio ſit. Exemplorum loco eadem accipiemus, quibus ſupra pro indicandis aquarum preſſionibus negativis uſi ſumus.

(I) In Figura ſeptuageſima quinta §. 12. explicata, ſi in tubulo DLN altitudo D ſupra N talis ſit, ut aqua in eo ſtagnans cum aquis in D præterfluentibus in æquilibrio ſit, tanta debet eſſe vis cohæſionis in D, ne aqua ibidem diſcerpatur, quantam habet pondus columnæ aqueæ ſimilis baſis & altitudinis verticalis DN. Inde intelligitur quod dixi §. 25. Sect. 3. *poſſe longitudinem tubi ita augeri, ut tandem aquæ deſinant eſſe continuæ in tubo, quin potius in columnas dividantur, idque fieri in tubis cylindricis cum infra tri-*

ginta duos pedes deſcendant; *in tubis divergentibus autem minorem deſcenſum requiri: ita ſi v. gr. orificium inferius duplo majus fuerit orificio ſuperiori in caſtellum biante non poſſe tubos infra octo pedes deſcendere, quin periculum adſit aquarum diſſolutionis.* In his tamen exemplis theoretice conſideratis aquæ omni ſua velocitate ſine diminutione motus effluere ponuntur.

(II.) Ex eadem ratione patet, ſi tubi inferiora verſus convergant, tunc illos majorem quam 32. *ped.* admittere deſcenſum: imo ſine fine tubum continuari poſſe in caſu Figuræ 76. §. 13. explicatæ, ut & infinitis aliis modis.

(III) Si vero altitudo ſuperficiei aqueæ in caſtello ratione loci propoſiti negativa fuerit, veluti fit, cum aquæ trans montem vehendæ ſunt, nunquam poterit quomodocunque res inſtituatur, altitudo excedere triginta duos pedes, quod patet ex §. 15. Si enim aquæ vel plane infinitè parva transfluant velocitate, vis cohæſionis jam requiritur, quæ ſit æqualis toti columnæ aqueæ, atque major vis requiritur, ſi notabili velocitate transfluxerint. Hinc remedia ab aliquibus Scriptoribus allata vana puto: ſcio quidem ſine alio artificio aquas ſæpe ſuſpenſas hærere ultra altitudinem 32. pedum, & Mercurium ultra 30. pollices; ſed is effectus incertus eſt nec ſibi conſtans. Quidam etiam affirmant fluxum aquarum per ſiphones recurvos fieri in vacuo: an vero vacuum tale fuerit, ut ne ſexageſima quidem aëris pars in recipiente remanſerit, & num altitudo tubi plus quam dimidio pede ſuperficiem aquæ hauriendæ exceſſerit ignoro. Sic igitur, quæ de ſubſecutura aquarum ſolutione dixi, non aliter quam hypothetice dicta velim conſiderentur. Sufficiet quod accurate determinaverim quanta vi aquæ ad ſeparationem mutuam urgeantur.

§. 17. Sunt porro alia naturæ phænomena, quorum vera explicatio ab iſta theoria *hydraulico-ſtatica* pendet: veluti quod fumus per caminum aſcendens aërem per foramen in camino factum magno poſt ſe trahat impe u: quod ventus ex loco anguſtiori in apertiorem flans aliquid de ſua elaſticitate perdat, prouti id colligitur ex eo, quod feneſtræ apertæ ab aëre, è camera egreſſum ob majorem ſuam elaſticitatem, tentante claudantur; & hujusmodi alia, quæ examinare ſingula non licet.

Poſſunt fluidorum motorum preſſiones quidem infinitis variari modis; puto tamen omnia ad principia noſtra reduci poſſe: duas iſtius theoriæ examinavi-

navimus ſpecies; primam deduxi ex cognito motu, quem fluidum habiturum ſit, ſi in loco determinandæ preſſionis foraminulo infinite parvo vas perforetur: alteram *à priori*, ut dicunt, ex theoria noſtra generali deduxi; ſæpe utraque ſimul locum obtinet, ut altera alterius opem requirat, & tunc alia oritur preſſionum æſtimatio, quam unico indicabo exemplo.

§. 18. Putemus in vaſe, quod figura 72. ſiſtit, tubum horizontalem nonſolum in extremitate, ſed & in ſua inſertione E G laminam habere in plano verticali in medio perforatam, manentibus cæteris poſitionibus §. 5. indicatis: aliam patientur preſſionem latera tubi E D à transfluente aquâ, quam nulla appoſita lamina E G & quidem minorem, quamvis minori velocitate transfluant. Ut preſſio hæc accurate definiatur, via calcanda eſt eadem, quæ in citatò paragrapho quinto: nempe ante omnia quærenda eſt velocitas, quâ aquæ in tubo E D transfluunt, poſtquam hæc jam uniformis facta eſt. Deinde etiam inquirendum eſt in valorem $\frac{v\,dv}{dx}$, ſi tubus alicubi abrumpi ponatur.

Quomodo autem hoc inveniri poſſit, res eſt quæ potiſſimum pertinet ad ſectionem octavam, adhibitis ſimul cautelis §. 14. *ſectionis ſeptimæ*: In ſectione octava generaliter oſtenditur motus fluidorum per plura foramina transfluentium & in §. 14. *ſect.* 7. in ſpecie monſtratur, quomodo æſtimandus ſit *aſcenſus potentialis*, qui in guttulis generatur, quando hæ per foramen, non in aquam veluti ſtagnantem, ſed in aquam motu, qui negligi nequit, latam influit.

Si recte indicatis hiſce inſiſtas veſtigiis, reperies velocitatem, quacum aqua uniformiter per tubum E D transfluit, convenire huic altitudini

$$\frac{mmppa}{mmnn+nnpp-mmpp},$$

ubi per m, p, & n indicantur *reſpective* amplitudines foraminum in laminis E G & F D factorum ut & tubi E D: per a autem intelligitur altitudo aquæ ſupra tubum E D horizontaliter poſitum.

Si porro tubum abrumpi ponas in cd, guttulamque ad velocitate moveri v ſeu altitudinem huic velocitati debitam $= vv$, ſimulque longitudinem E c indices per c, longitudinem minimam ac per dx: æquationem invenies hanc

 $2cvdv +$

$$2cvdv + \frac{nn}{mm}vvdx = adx, \text{ ſive}$$

$$\frac{vdv}{dx} = \frac{mma - nnvv}{2mmc};$$

ſtubſtituatur nunc pro vv valor modo indicatus $\frac{mmppa}{mmnn + nnpp - mmpp}$, & erit

$$\frac{vdv}{dx} = \frac{mmnn - mmpp}{2c(mmnn + nnpp - mmpp)}a,$$

cui preſſio quæſita eſt proportionalis. Sed ſi amplitudo orificii extremi indicata per p eſt veluti infinite parva, preſſio fit $= a$; Igitur eſt generaliter preſſio quæſita vi paragraphi quinti æqualis

$$\frac{mmnn - mmpp}{mmnn + nnpp - mmpp}a.$$

§. 19. Si amplitudo tubi n eſt veluti infinita ratione amplitudinum in laminarum foraminibus, fit preſſio $= \frac{mma}{mm+pp}$: & tanta etiam eſt altitudo, ad quam aqua in o effluens velocitate ſua aſcendere poteſt: id igitur conforme cum *paragrapho quarto ſectionis octavæ*, quia figura vaſis ceu ubique infinitæ amplitudinis non differre facit velocitatem aquæ exilientis.

Cum nulla eſt lamina in F, fit $p = n$, totaque preſſio evaneſcit. Notari id meretur, quia rationem oſtendit, cur in tubis divergentibus ſuctio tanta non ſit, quanta vi hypotheſeos, qua omnis *vis viva* conſervari ponitur, eſſe deberet: In præſenti enim caſu rationem habuimus illius *vis vivæ*, quæ continue abſumitur. Ita quoque nullam preſſionem patiuntur latera tubi, cum lamina quæ eſt in E G foramen veluti infinite minus, illo, quod eſt in F D, habet. Denique notari id quoque meretur, quod quamvis fluida per canales nullis laminis inſtructos mota generaliter affectent preſſionem, quæ reſpondeat differentiæ altitudinum illis velocitatibus debitarum, qua fluidum effluat poſt tempus infinitum per canalem abruptum & qua actu transfluit per canalem non abruptum, hanc legem tamen in præſenti caſu minime valere, ad quod animum attendere velim hos, qui viſa theoria noſtra *hydraulico-ſtatica*, propoſitionem generalem §. 10. ſynthetice demonſtrare volent. Erunt enim fortaſſe, quibus res hæc ita per ſe obvia videbitur, ut vix demonſtranda ſit: hos autem, ſi qui futuri ſint, ex falſa quadam veriſimilitudine ſibimet imponere, oſtendunt hujus modi leges particulares, quæ in *hydraulico-ſtatica* occurrunt.

§. 20.

§. 20. E re erit de his quoque,quæ §. 18. dicta ſunt, experimenta ſumere, tum pro velocitate aquarum in o effluentium, tum pro preſſione ; inde enim præter preſſionum leges confirmabitur etiam illa accelerationum theoria, quæ obtinet, cum continue pars quædam *vis vivæ* inutiliter abſumitur, quod argumentum in ſectione octava præſertim pertractavimus ; In experimento autem ſumendo evitentur, quantum fieri poteſt, impedimenta, quorum jam ſæpe mentionem fecimus.

§. 21. Adjiciam hic quæſtionem quæ quidem non ad ſtaticam fluidorum pertinet, ſed ad hydraulicam ſeu motum fluidorum, quæ vero ſine iſtis præmiſſis regulis *hydraulico-ſtaticis* ſolvi nequit. Quæritur in figura ſeptuageſima ſecunda (nullam hic amplius in E G laminam conſidero) ſi tubus foramine in ac perforetur finitam rationem habente tum ad amplitudinem tubi tum ad amplitudinem foraminis o, motusque aquarum jam uniformis factus fuerit, quæritur, inquam, quanta velocitate aquæ per utramque aperturam erupturæ ſint.

Sit jam rurſus altitudo B E $= a$, amplitudo tubi $= n$ amplitudo orificii in $o = p$: amplitudo foraminis $ac = m$: velocitas aquæ per o effluentis $= v$: Erit velocitas aquæ quæ foramen ac præterfluit $= \frac{p}{n} v$. Igitur ibidem in latera tubi exercet preſſionem, quæ eſt $= a - \frac{ppvv}{nn}$ (per §. 5.) & propterea ſuppono proxime fore tantam quoque altitudinem, quæ generare poſſit velocitatem, qua aqua per foramen ac exilit: ipſam vero hanc velocitatem eſſe $= \surd \left(a - \frac{ppvv}{nn}\right)$. Hoc poſito erunt velocitates in foraminibus o & ac ut v ad $\surd \left(a - \frac{ppvv}{nn}\right)$: ſicque quælibet guttula tubum in G E ingrediens, cum pervenit ad regionem primi foraminis, in duas diſpeſcitur partes, quarum altera per ac, altera per o effluit : ſuntque hæ partes reſpective, ut velocitates, quibus fit effluxus utrobique ductæ in amplitudines foraminum. Igitur ſi maſſa guttulæ integræ G E dicatur g, erit pars ejus per ac effluens æqualis

$$gm \surd \left(a - \frac{ppvv}{nn}\right) : \left[pv + m \surd \left(a - \frac{ppvv}{nn}\right)\right]$$

& pars altera per o effluens $=$

gpv :

$$gpv : \left[pv + m\sqrt{\left(a - \frac{ppvv}{nn} \right)} \right].$$

Si hæ partes multiplicentur *reſpective* per quadrata ſuarum velocitatum, habebuntur earundem *vires vivæ*, quarum aggregatum æquandum eſt cum $g \times a$, id eſt, cum *deſcenſu actuali* guttulæ g per altitudinem a. Sic obtinetur talis æquatio, ſi reducatur

$$n^3 vv - n^3 a = mpv\sqrt{(nna - ppvv)} \text{ ſive}$$

$$vv = \frac{2n^6 + mmnnpp + nnmp\sqrt{4n^4 + mmpp - 4nnpp)}}{2n^6 + 2mmp^4.}\, a,$$

hæcque quantitas exprimit altitudinem pro velocitate aquæ in o effluentis, qua cognita habetur quoque altitudo ſimilis pro altero foramine ac, quæ nempe eſt $= a - \frac{ppvv}{nn}$.

§. 22. Si $p = n$, fit $vv = a$; ergo tunc aquæ tota velocitate exiliunt ſolita per foramen o, & per alterum foramen ac nihil effluit. In utroque porro foramine velocitas reſpondet integræ altitudini a, ſi p eſt veluti infinite parva: Si vero m eſt infinite parva, fit quidem $vv = a$, ſed altitudo velocitatis pro foraminulo ac eſt $= a - \frac{pp}{nn}a$, ut §. 7. jam indicatum fuit: Si $m = p$, fit $vv = \frac{n^4 a}{n^4 - nnpp + p^4}$; & $a - \frac{ppvv}{nn} = \frac{(nn - pp)^2 a}{n^4 - nnpp + p^4}$.

Denique obſervari poteſt, aquas per foramen o ſemper majori velocitate ejici, quam quæ altitudini a reſpondet, quod utique fit, quia aquæ in E d veluti impetum faciunt in aquas d F.

Interim quamvis omnia hæc Corollaria egregie cum indole argumenti conſentiunt, non poteſt tamen ſolutio iſtius problematis aliter quam proxime vera cenſeri.

EXPE-

EXPERIMENTA
Hydraulico-ſtatica pro Sectione XII.

Ad §. §. 3. & 4.

PReſſiones, quæ dictis expoſitæ fuerunt paragraphis, facili experimento confirmari poterunt, ſi vas, quale figura quadrageſima tertia ſiſtit, quodque §. 30. *ſect.* 8. deſcribitur, confici curetur, ejusdemque laminæ L Q tubus vitreus verticaliter implantetur, cujus orificium utrumque apertum ſit : obſervabitur ſic obturatis foraminibus H & N totoque ſyſtemate aquis repleto, aquam in tubo vitreo ad libellam A B aſcendere, aut illam propter naturam tubulorum capillarium tranſcendere. Dein autem ſi digitus ab orificio N removeatur, obſervabitur, aquam in tubo vitreo deſcendere & captis menſuris, invenietur, ni fallor, altitudinem aquæ in tubo vitreo reſiduam (detracta altitudine virtuti tuborum capillarium debita) eſſe = $\frac{\alpha\alpha \times LB - \gamma\gamma \times NQ}{\alpha\alpha + \gamma\gamma}$, uti dictum eſt §. 3. ubi denominationes harum litterarum explicantur.

Si porro ab utroque orificio H & N digitus removeatur, tunc erit eadem altitudo aquæ in tubo vitreo reſidua talis, quæ §. 4. indicatur. Similiter poteſt tubus vitreus laminæ Q N inſeri, isque deinde inflecti, ut cognoſci poſſit, an preſſiones quoque in lamina Q N recte definitæ fuerint.

Experimenta vero quæ ad preſſiones aquarum per tubos latarum pertinent ipſemet coram Societate noſtra inſtitui & deſcripta ſunt in tom. IV. Commentariorum *pag.* 194. Illa igitur, ut ibi deſcripta ſunt, hic allegabo.

„ Uſus ſum arca lignea, cujus latitudo erat unius pedis, longitudo trium „ pedum, altitudo 14. pollicum. Hanc aqua implevi ejuſque parti infimæ „ fiſtulam accurate cylindricam ex ferro fabricatam infixi horizontaliter. Ita „ autem factus erat tubus iſte ferreus : longitudinem nempe habuit A B „ (Fig. 77.) 4. poll. 2. lin. Angl. diametrum B C 7. lin. in medio tubus Fig. 77. „ foraminulo *m* erat perforatus, ibidemque tubulus D E pariter ferreus ſex li- 78&79. „ neas longus ac ſesquilineam in diametro habens afferruminatus erat, ita ut

„ foraminulum *m* in medio baſis foveret : Huic poſtmodum tubulo impoſui
„ tubum vitreum aquabilis amplitudinis, ut apparet in figura 79. quæ modum
„ totius experimenti indicat. Porro tria opercula confieri curavi tubo fer-
„ reo adaptata, foramine diverſæ magnitudinis pertuſa : tale operculum repræ-
„ ſentatur Figura 78.

„ Hiſce omnibus conjunctis eum in modum, quem oſtendit figura 79,
„ factoque, ne aqua per alias rimas, quam per aperturam in B C efflueret, ob-
„ turavi orificium in B C, tumque obſervavi in tubo vitreo verticaciter poſi-
„ to punctum *n*, ad quod aquæ aſcendebant, idque filo ſericeo circumvolu-
„ to notavi: prius autem exploraveram virtutem capillarem iſtius tubi vitrei,
„ hancque inveneram quinque linearum, ita ut tubo aquæ verticaliter immiſ-
„ ſo differentia inter utramque aquæ ſuperficiem eſſet quinque linearum:
„ propterea punctum *n* ſupra ſuperficiem E F elevatum fuit totidem lineis,
„ hincque in calculo quævis altitudo D *n*, D *g*, quinque lineis diminuta cen-
„ ſenda eſt.

„ In ſingulis experimentis arca aquis ita plena conſervata fuit, ut alti-
„ tudo A F eſſet 9. *poll.* 7. *lin.* altitudo autem D *n* 10. *poll.* His omnibus ita
„ ad experimentum præparatis, tunc aperto orificio in B C aquis effluxus
„ concedebatur & protinus deſcendit aqua in tubo vitreo, veluti ex *n* in *g*, quem
„ locum *g* rurſus alio filo ſericeo antea tubo circumvoluto notavi. Et ſic de-
„ nique talia cepimus experimenta quæ reſpondent §. 5. & ſeqq.

Experimentum 1.

„ Cum diameter foraminis in operculo B C eſſet $2\frac{1}{5}$ *lin.* fuit deſcenſus
„ *n g* tantillo major una linea, ita ut nulla differentia inter theoriam & ſucceſ-
„ ſum experimenti obſervari potuerit.

Experimentum 2.

„ Aſſumto alio operculo, in quo diameter foraminis erat $3\frac{2}{5}$ *lin.* aut paul-
„ lulum major, deſcenſus *n g* obſervatus fuit ſex linearum cum duabus ter-
„ tiis, plane rurſus, ut theoria indicat.

Experi-

Experimentum 3.

„ Adhibito tertio operculo, in quo diameter foraminis erat 5. *lin.* aut „ aliquantulum minor, deſcenſum *n g* obſervavimus 28. *lin.* Vi theoriæ debebat eſſe circiter 29. *lin.* nec enim foramen omnino quinque lineas in diametro habere viſum fuit. Differentia parvula tribuenda eſt impedimentis, quæ aqua in transfluxu per fiſtulam patitur, majoribus quam in præcedentibus experimentis, ob auctum motum intra fiſtulam.

Experimentum 4.

„ Denique nullo appoſito operculo aquas pleno orificio effluere ſivimus, tuncque omnis fere aqua è tubo vitreo egreſſa fuit: pars tamen aliqua remanſit, quam deprehendimus octo lineas altam: Earum autem quinque tribuendæ ſunt virtuti tubi capillaris, tres reliquæ debentur impedimentis, quæ aqua in transfluxu à D uſque ad B offendit.

„ Sic igitur experimenta ad amuſſim cum theoria conveniunt: Inde „ autem non difficile eſt prævidere, fieri poſſe, ut latera fiſtulæ non ſolum non premantur verſus exteriora, ſed & ut verſus axem fiſtulæ introrſum comprimantur (confer. §. 11.). Id autem edoctus ſum hoc alio experimento.

Experimentum 5.

„ Loco tubi cylindrici AB adhibui conicum, cujus orificium externum erat majus orificio interno, ſimulque uſus ſum tubo vitreo incurvato, qualem oſtendit Figura 80. Et cum ante fluxum aqua hæſit in tubo vitreo Fig. 80.
in *n*, deſcendit in eodem tubo aqua uſque in *g*, cum aquæ effluerent per tubum conicum: fuitque punctum g infra D, indicio compreſſum fuiſſe durante fluxu tubum conicum. In his autem caſibus impedimenta motus ſunt inſignia, quæ faciunt ut velocitates aquæ in orificio externo admodum minores ſint, quam quæ reſpondent altitudini aquæ: hancque ob rationem altitudo puncti D ſupra g tanta non fuit, quanta alias futura fuiſſet, fuit tamen aliqua. Similem effectum alio obtinui modo, ſed admodum notabiliorem (confer. §. 12.). Experimentum hoc alterum ſubſequente anno coram Academicis inſtitui, præſente Sereniſſimo Portugaliæ Principe Emanuele.

Experimentum 6.

Fig. 81. „ In Figura 81. repræſentat ACFB cylindrum, in cujus fundo implantatus erat tubus conicus DGHE; hicque ad latus habuit parvulum tubulum in *l*, qui reciperet extremitatem tubi vitrei incurvati *lmn*; altitudo CA erat 3. *poll.* 10. *lin.* E *l* 4. *lin.* *l* H 2. *poll.* $9\frac{1}{2}$. *lin.* amplitudo tubi conici in *l* erat ad amplitudinem orificii GH ut 10. ad 16. *ln* erat 5. *poll.* 6. *lin.* ejuſque orificium *n* erat aquæ in vaſculo M ſubmerſum.

„ Appoſito digito orificio GH impletoque vaſe ſtillabat aqua per tubum vitreum *lmn* in vas M: remoto autem digito & effluentibus jam aquis per GH, motu reciproco aqua ſponte ex vaſculo M aſcendit per tubum *nml*, & una cum reliquis effluxit per GH, donec totum vaſculum M evacuatum eſſet. Affundebantur autem ſuperius continue aquæ, ut vas plenum conſervaretur. Si digito pars orificii GH obtegebatur, facile erat efficere ut pro lubitu aquæ in tubo vitreo *lmn* ſurſum deorſumve moverentur.

Si quis etiam experimentis explorare voluerit, num theoria cum problemate §. 18. conveniat, non male operam ſuam collocaverit, quandoquidem non ſolum ſic novam hanc noſtram *hydraulico-ſtaticam*, ſed & theoriam *Sect.* 8. novam pariter & à nemine tractatam egregio exemplo eoque facillimo illuſtraverit.

Hiſce jam in chartam conjectis ipſe experimenta ſumſi, quorum modo mentionem feci: Machina ad id uſus ſum eadem, quam modo deſcripſi, quæque Figura 79. repræſentatur: ſed inſuper, ut natura rei poſtulat, in A tubo aliud operculum impoſui: eratque altitudo aquæ AF 8. *poll. Lond.* diameter tubi ferrei AC rurſus 7. *lin.* Operculis quoque iiſdem uſus ſum, quibus ante: In quovis autem experimento deſcenſum obſervavi, quem ſuperficies *n* fecit, cum digitus ab operculo BC removeretur: ſimul autem menſura capta altitudinis verticalis orificii C ſupra pavimentum obſervavi diſtantiam iſtius lineæ verticalis à loco, in quem vena aquea incidebat. Hanc diſtantiam vocabo *amplitudinem jactus*: altitudo autem hæc verticalis erat in ſingulis experimentis 19. *poll.* His ita præparatis experimenta feci talia.

Experi-

Experimentum 7.

Cum diameter orificii interioris operculi eſſet $2\frac{1}{5}$. *lin.* & diameter orificii exterioris orificii $3\frac{2}{5}$. *lin.* fuit deſcenſus *n g* paullo minor, quam 7. *poll. amplitudo jactus* 9. *poll.* In theoria autem §. 18. expoſita, indicatur deſcenſus *ng* 6. *poll.* 10. *lin.* & *amplitudo jactus* $9\frac{1}{2}$. *poll.*

Experimentum 8.

Deinde fuit diameter orificii interni 5. *lin.* & diameter alterius orificii $3\frac{2}{5}$. *lin.* fuit deſcenſus *ng* fere 17. *lin.* & *amplitudo jactus* 24. *poll.* In theoria eſt *ng* $17\frac{3}{4}$. *lin.* & *amplitudo jactus* 23. *poll.*

Experimentum 9.

Porro cum eſſet diameter orificii interni $3\frac{2}{5}$. *lin.* & diameter orificii exterioris 5. *lin.* fuit deſcenſus *ng* fere idem, qui in experimento 7. nempe circiter 7. *poll.* Verum *amplitudo jactus* fuit major, ſcilicet 11. *poll.* In theoria eſt *ng* 6. *poll.* 11. *lin.* & *amplitudo jactus* fere 11. *poll.*

Experimentum 10.

Denique exiſtente diametro orificii interioris $3\frac{2}{5}$. *lin.* & diametro orificii exterioris $2\frac{1}{5}$. *lin.* fuit deſcenſus *n g* circiter unius pollicis atque *amplitudo jactus* 23. *poll.* In theoria eſt *ng* = 14. *lin.* & *amplitudo jactus* = $22\frac{1}{2}$. *poll.*

Omnia profecto hæc experimenta egregiè cum theoria conveniunt; fortaſſe major conſenſus futurus fuiſſet, ſi majori accuratione foraminum menſuras accipere licuiſſet; nemo tamen, ut puto, minimis iſtis numerorum differentiis offendetur. Oriuntur autem maximè à compreſſione aquæ in A C, quæ producitur, dum guttulæ per orificium interius canalem ingredientes partem motus amittunt, hinc amplitudo jactus tantillo major & deſcenſus *ng* minor ſunt in theoria quam in experimentis, nolui hujus rei menſuram adjicere, quamvis id in poteſtate fuiſſet, ne calculus fieret intricatior.

HYDRODYNAMICÆ
SECTIO DECIMA TERTIA.
De reactione fluidorum ex vaſis effluentium eorundemque, poſtquam effluxerunt, impetu in plana quibus occurrunt.

§. I.

AQuæ dum ex vaſe ejiciuntur ſimili agunt modo in vas, ex quo effluunt, quo globus in tormentum bellicum aut ſclopetum, ex quo exploditur: vas nempe retropellunt: & id quidem jam annotavit Newtonus in *princ. Math. phil. nat. edit. prim. p.* 332. recteque inde deducit aſcenſum pilarum, quæ pulvere pyrio, carbone temperato implentur; materia enim inflammata, dum per foramen paullatim expirat, pilas in altum projicit.

Sed nec ſatis generaliter pro rei momento argumentum pertractavit citatus auctor (cum id ex ipſius inſtituto non erat) nec veram rei menſuram dedit. Imo in duabus editionibus poſterioribus id prorſus ſilentio præteriit: putavit autem *vim illam repulſionis eſſe æqualem ponderi cylindri aquei, cujus baſis ſit orificium aquas tranſmittens & cujus altitudo ſit æqualis altitudini ſuperficiei aqueæ ſupra foramen.* Recte quidem hæc menſura deducitur ex opinione, quam tunc temporis fovebat Newtonus, circa velocitatem aquæ ex vaſe effluentis, dum ſtatueret aquam ad dimidiam ſuperficiei altitudinem ſua velocitate aſcendere poſſe.

Prouti autem hujus propoſitionis falſitas nemini amplius nunc ignota eſt, ita & alterius defectum inde quivis facile colliget, quamvis prima fronte ſatis veriſimilis.

§. 2. Conſiderabimus primo rem in caſu ſimpliciſſimo, quo nempe aquas ex vaſe infinitæ amplitudinis horizontaliter effluere ponemus. Habeo autem demonſtratum repulſionis vim non ſtatim à fluxus initio totam adeſſe, niſi quatenus & ipſa velocitas in aquis effluentibus tota adſit, ita ut ſi vas non

ſit

ſit infinitæ amplitudinis, vis repulſionis una cum velocitate aquarum effluentium ſenſim ſenſimque creſcat, aut etiam decreſcat pro circumſtantiarum natura: Ab his autem mutationibus momentaneis animum primo abſtrahemus, Fig. 74. fluxum ex vaſe infinito fieri æquabilem ponendo. Atque ſic optime definietur vis repulſionis, ſi inquiratur, quænam ſit vis ad motum producendum requiſita: Hunc vero in finem non ſolum ad velocitatem aquæ effluentis, ſed & ad illius quantitatem erit reſpiciendum; quantitas autem pendet partim à magnitudine orificii, partim à contractione venæ, quæ poſterior variabilis eſt: Vidimus quidem in *Sect. IV.* poſſe totam evitari; ſi tamen quædam ſit, erit Sectio venæ maxime contractæ ſive attenuatæ ceu orificium conſiderandum & tunc dico fore *vim repulſionis æqualem ponderi cylindri aquei, cujus baſis ſit orificium aquas tranſmittens* (id eſt, Sectio venæ horizontalis maxime contractæ) *& cujus altitudo ſit æqualis duplæ altitudini ſuperficiei aqueæ ſupra foramen vel accuratius, duplæ altitudini, velocitati aquæ effluentis debitæ.* Igitur ſi nulla ſit venæ contractio, prouti nulla eſt, cum per tubulum brevem aquæ effluant, repulſio duplo aut fere duplo major erit, quam à Newtono definita fuit.

§. 3. Ut hanc propoſitionem demonſtremus, conſiderandum hic erit principium aliquod Mechanicum cujus uſum in aliis etiam quæſtionibus ſolvendis ſæpe expertus ſum: principium hoc eſt:

Si corpus à quiete velocitatem eandem per preſſiones motrices directas utcunque variabiles acquiſiverit, atque ſingulæ preſſiones in tempuſcula ſua multiplicentur, erit ſumma omnium productorum ſemper eadem, id eſt, ſi preſſio ſit $= p$, *tempuſculum* $= dt$, *erit* $\int p\,dt$ *conſtans.* Hanc rem clarius expoſui in Comment. Acad. Imp. Petrop. tom. 1. pag. 132.

§. 4. Ponamus jam cylindrum infinitæ veluti amplitudinis, ex quo aquæ horizontaliter effluant velocitate uniformi, abſtrahendo ab actione, quam gravitas exerit in particulas, poſtquam jam effluxerunt, ita ut ſingulæ horizontaliter & uniformiter moveri pergant; particulæ autem accelerantur preſſionemque patiuntur, quamdiu maximus velocitatis gradus nondum adeſt, huncque obtinent cum ad locum venæ maxime contractæ pervenerunt; hæc eſt ratio, quod ſectionem venæ ibidem conceptam ceu orificium effluxus conſide-

ſiderandum eſſe dixi. Sit amplitudo iſtius Sectionis $= 1$, habeantque ibi aquæ velocitatem quæ debeatur altitudini A: ponatur, cylindrum aquæ effluxiſſe, qui pro baſe habeat 1 & pro longitudine L: ſi tempus exprimatur per ſpatium diviſum per velocitatem, erit velocitas altitudini A debita exprimenda per $\sqrt{2A}$, tempuſque fluxus per $\frac{L}{\sqrt{2A}}$. His præmiſſis indagabimus in preſſionem motricem, quæ poſſit tempore $\left(\frac{L}{\sqrt{2a}}\right)$ cylindro L communicare velocitatem $\sqrt{2A}$: ſit illa preſſio $= p$: putetur brevioris calculi ergo egiſſe tempore t cylindroque dediſſe velocitatem v; erit $dv = \frac{pdt}{L}$ & $v = \frac{pt}{L}$, hinc $p = \frac{Lv}{t}$; ponatur jam $\sqrt{2A}$ pro v & $\frac{L}{\sqrt{2A}}$ pro t atque erit $p = (L\sqrt{2A}) : \left(\frac{L}{\sqrt{2A}}\right) = 2A$. Eſt igitur preſſio aquam ad effluxum conſtanter ſollicitans æqualis ponderi cylindri aquei, cujus baſis ſit orificium aquas tranſmittens ſupra definitum & cujus altitudo ſit æqualis duplæ altitudini velocitati aquæ effluentis debitæ: & tanta quoque eſt reactio, quæ vas repellit. Q.E.D.

§. 5. Eadem eſt demonſtratio ſi aquæ non per orificium ſed per tubum horizontalem cylindricum velocitate uniformi effluant, aut etiam per tubum utcunque inæqualiter amplum: poſterius id directe demonſtrari etiam poteſt, ſi bene exprimatur preſſio requiſita in ſingulis guttis, ut hæ debita velocitatum incrementa aut decrementa ſuſcipiant.

§. 6. Altitudo, quam vocavimus A, parum quidem differt in experimentis ab altitudine aquæ ſupra orificium effluxus, præſertim ſi aquæ ex vaſe valde amplo per orificium ſimplex, idque non admodum parvum effluant: differt autem ſæpius notabiliter orificium effluxus à ſectione minima venæ, quam nos ceu orificium aquas tranſmittens conſideramus; id quantitas aquæ dato tempore effluentis cum velocitate ſua comparata in experimentis indicat.

Hinc fit ut propoſitio noſtra §. 3. ad experientiam vocata ordinario non multum diſcrepet ab propoſitione Newtoni §. 1. expoſita; ſi vero omnia ſollicite evitentur, quæ contractionem venæ producere & quæ velocitatem diminuere poſſunt, vis repellens ſecundum theoriam noſtram fiet tantum non duplo major, quam quæ à Newtono fuit definita & tunc talis etiam experimentis confirmatur.

At ut rem plane in apricum ponamus, eam generalius nunc proſequemur, idque tentabimus, ut vim repellentem à fluxus initio, dum velocitates continue mutantur, determinemus: neque enim primum noſtrum theorema aliter quam cum velocitas invariata manet locum habet. Ut in quæſtione hâc paullo intricatiore pertractanda eo intelligibiliores ſimus, hîc quædam generaliora præmonuiſſe juvabit.

§. 7. *Quantitas motus* eſt factum ex velocitate in maſſam: ſi velocitates ſint inæquales, habebitur *quantitas motus abſoluta*, ſi ſingulæ particulæ per ſuam reſpective velocitatem multiplicentur productorumque ſumma accipiatur. *Quantitas motus* generatur à preſſionibus motricibus dato tempore urgentibus & effectus cauſæ eſt æqualis cenſendus: Igitur ſumma preſſionum motricium per ſua tempuſcula multiplicatorum æſtimanda eſt ex genita quantitate motus. Et quia quælibet preſſio motrix reagit in vas, ex quo aquæ effluunt, erit tota vis repellens pro quovis momento æqualis novæ quantitati motus diviſæ per tempuſculum, quo generatur. His præmonitis ad quæſtionem ipſam progredior.

§. 8. Sit igitur vas infinitæ amplitudinis ACDB (Fig. 82.) eique horizontaliter infixa fiſtula EHID, cujus amplitudines utcunque inæquales ponuntur: amplitudo orificii HI fuerit $= 1$, longitudo fiſtulæ $= m$; velocitas utcunque variabilis in HI $= \sqrt{2v}$, ſeu talis, quæ debeatur altitudini v: dico primo, fore quantitatem motus abſolutam aquæ in fiſtula contentæ æqualem $m\sqrt{2v}$, id eſt, talem ac ſi fiſtula eſſet cylindrica ſuaque amplitudine orificium HI exæquaret, quia nempe cujuslibet ſtrati FG gf velocitas eſt maſſæ reciproce proportionalis. Fig. 82.

Jam vero fingamus dato tempuſculo infinite parvo exilire per orificium HI columellam HLMI, cujus longitudinem HL vel IM ponemus $= \alpha$: erit maſſa hujus columellæ $= \alpha$, habebitque quantitatem motus $= \alpha\sqrt{2v}$: ſed eodem tempore maſſa aquæ in fiſtula contentæ acquiſivit quantitatem motus $\frac{m\,dv}{\sqrt{2v}}$ (habuit enim $m\sqrt{2v}$); eſt igitur quantitas motus abſoluta dato tempuſculo genita $= \alpha\sqrt{2v} + \frac{m\,dv}{\sqrt{2v}}$; hæc vero ſi dividatur per idem tempuſculum (quod exprimendum eſt per $\frac{\alpha}{\sqrt{2v}}$) habebitur, ut vidimus §. 7. preſſio quæſita vas repellens, quæ proinde ſi vocetur p, erit

$$p = \left(\alpha\sqrt{2v} + \frac{mdv}{\sqrt{2v}}\right) : \frac{\alpha}{\sqrt{2v}},$$ ſive

$$p = 2v + \frac{mdv}{\alpha}.$$

(α) Apparet inde ultimam definitionem quæſtionis pendere à ratione quæ intercedit inter dv & α; hanc vero in Sectione tertia generaliter definivimus, nulla tamen impedimentorum, quæ debentur caſui, facta attentione. Igitur & figura fiſtulæ hic aliquid confert.

(β) Sequitur porro, ſi fluxus uniformis factus ponatur, eſſe p conſtanter $= 2v$, quia tunc $dv = o$: Id vero conforme eſt cum eo, quod demonſtravimus §. 5. Donec vero fluxus incrementa accipit (quod quidem facit notabiliter, idque diu ſatis, ſi canalis E I longior fuerit) vas aliam atque aliam patitur vim repellentem.

(γ) Habet dv ad α ſemper rationem realem: ergo vis repellens nunquam eſt nulla, ſic ut à primo fluxus tempore vas repellatur, etiamſi tunc aquæ fere nullæ effluant ob exiguam earundem velocitatem. Verum, ut uſus regulæ noſtræ generalis unicuique pateat, eam nunc ad caſum ſpecialem applicabimus, tribuendo fiſtulæ EHID figuram cylindricam amplitudinis 1.

§. 9. Si igitur fiſtula ponatur cylindrica tota aperta in HI retentis cæteris poſitionibus & denominationibus, erit *vis viva* aquæ in fiſtula contentæ $= mv$; hujus incrementum $= mdv$, cui addenda *vis viva* columellæ HLMI ſeu αv, eorumque ſumma æqualis facienda facto ex altitudine, quam habet ſuperficies aquæ AB ſupra orificium HI, quamque vocabimus a, & ex maſſula α. Eſt igitur $mdv + \alpha v = \alpha a$, unde hic fit $\frac{dv}{\alpha} = \frac{a-v}{m}$. Iſto autem valore ſubſtituto in æquatione ſuperioris paragrahi fit

$$p = a + v.$$

unde talia deduco conſectaria.

(α) Longitudo fiſtulæ nihil ad vim repellentem, quam vas ſuſtinet, tribuit, ſi velocitas eadem ponatur, quia littera m è calculo evanuit, facit autem hæc longitudo (ſicuti in ſuperioribus ſatis ſuperque demonſtravimus) ut velocitates citiora aut lentiora incrementa capiant; quo longior enim fuerit

rit fiſtula, eo tardius accelerantur aquæ & viciſſim, ſic ut in inſtanti à quiete maximum ſuum celeritatis gradum acquirant, ſi longitudo fiſtulæ nulla fuerit; at ſi infinitæ fuerit eadem hæc fiſtula longitudinis, aquæ nonniſi poſt tempus infinitum notab lem celeritatis gradum acquirere poſſunt.

(ϐ) Fieri igitur poteſt non mutata aquarum altitudine, ut diſpendio aquarum quantumvis parvo, vis repellens notabilis ſit, eaque pro lubitu duret; & id quidem duplici obtineri poteſt modo, tum prolongando fiſtulam, tum etiam obturando ſæpius orificium, antequam aquæ notabilem velocitatis gradum attigerint; prior tamen modus liberum aquarum fluxum per fiſtulam ponit: retardato enim ab impedimentis extrinſecis, in prælongis fiſtulis nunquam vitabilibus, aquarum fluxu, diminuitur quoque vis repellens.

(γ) Liceat hic paucis attingere verbis propoſitionem aliquam ex *princ. math. phil. nat. edit. 2. Newtoni*: Auctor hic poſtquam ſententiam ſuam de velocitate aquarum ex vaſe effluentium in prima citati operis editione exhibitam mutaſſet, easque, ſi verticaliter ſurſum ejiciantur, ad integram ſuperficiei aquæ altitudinem aſcendere agnoviſſet in editione ſecunda, talia ſubjecit verba in *libro ſecundo propos. 36. coroll. 2. Vis qua totus aquæ exilientis motus generari poteſt, æqualis eſt ponderi cylindricæ columellæ aquæ, cujus baſis eſt foramen EF (vid. fig. Nevvt.) & cujus altitudo eſt 2 GI vel 2 CK.* Iſta ſententia à me olim & ab aliis fuit impugnata, ab aliis rurſus confirmata. Nunc autem poſtquam hanc aquarum motarum theoriam meditatus ſum, lis ita dirimenda mihi videtur, ut cum aquæ ad motum uniformem pervenerint, quæ quidem hypotheſis eſt Newtoni, tunc recte altitudine 2 GI vis illa definiatur, ſed ab initio fluxus, ubi velocitas adhuc nulla eſt, vis ſimplici altitudini GI reſpondeat, moxque creſcente velocitate ſimul vis aquam ad effluxum animans creſcat, & tandem ad eam magnitudinem exſurgat, quam Newtonus aſſignavit. Hæc nunc ſunt unicuique obvia, quia vis motum aquæ generans, de qua Newtonus loquitur, non poteſt non eſſe æqualis vi repellenti, quam vidimus eſſe æqualem $a + v$. Recte etiam Jll. Riccatus, cum quo mihi de hoc argumento res erat interrogatus, *unde vis illa dupla aquarum altitudini conveniens oriri poſſit, cum*

 obtu-

obturato orificio gutta eidem imminens vi ſimplicis altitudinis urgeri manifeſte appareat, reſpondit, *diſtinguendum eſſe ſtatum quietis à ſtatu motus.*

§. 10. Si fiſtula vaſi implantata non ſit cylindrica, calculus ita erit ponendus.

Sit amplitudo canalis in F G vel $fg = y$; diſtantia ſtrati F G gf ab orificio E D $= x$, retineanturque cæteræ denominationes: erit *vis viva* aquæ in fiſtula contentæ $= v\int\frac{dx}{y}$, ejusque incrementum $= dv\int\frac{dx}{y}$, cui ut in §. præcedente factum eſt, addatur *vis viva* columellæ H L M I ſeu αv, eritque $dv\int\frac{dx}{y} + \alpha \dot{v} = \alpha a$; unde ſic oritur

$$\frac{dv}{\alpha} = (a - v) : \int\frac{dx}{y},$$

quo valore ſubſtituto in æquatione §. 8. fit

$$p = 2v + m(a - v) : \int\frac{dx}{y}.$$

Igitur cum in fluxu aquarum uniformi ſit $v = a$, erit tunc rurſus $p = 2a$. Cæterum quamdiu aquarum fluxus acceleratur, motus aquæ in vaſe A C D B orificio D E proximæ, à quo in toto hoc opere animum abſtraximus, hic non eſt negligendus: determinari autem recte motus iſte non poteſt, nec igitur accurate quadrat expreſſio quam dedi pro vi repellente ſi aquæ nondum uniformiter fluere ceperint, ſed cum æquabiliter fluunt aquæ valet expreſſio accuratiſſime.

§. 11. Poſtquam ſic demonſtravimus pro effluxu aquarum uniformi, vim repellentem ſemper eſſe æqualem ponderi cylindri aquei foramini ſuperinſtructi & ad duplam aquæ altitudinem exſurgentis, lubet id etiam indirecte demonſtrare per *deductionem ad abſurdum*, ut & regularum mechanicarum ignari propoſitionis hujus ſatis paradoxæ veritatem perſpiciant.

Hunc in finem conſiderabimus aquas verticaliter defluentes ex cylindro, abſtrahendo animum ab impedimentis velocitati aquarum aliquid derogantibus & ab illa contractione venæ, quæ vitari poteſt. Foramini reſpondeat tubus verticalis, qualis conſpicitur Fig. 76. habeant ſe omnia, ut in Sect. XII. §. 13. dictum fuit: aquæ habeant fluxum æquabilem: latera vaſis & canalis gra-

gravitate carere intelligantur, altitudo cylindri ponatur $= a$, & altitudo fiſtulæ $= b$, altitudo cF $= x$, amplitudo in E $= 1$; erit amplitudo in F $= \frac{\sqrt{(a+b)}}{\sqrt{(a+x)}}$ & in C $= \frac{\sqrt{(a+b)}}{\sqrt{a}}$: Denique ponatur amplitudo cylindri $=$ M. His poſitis quæremus pondus omnis aquæ ABCE: exprimemus pondus aquæ ABC per Ma & ſic erit pondus aquæ CE $= 2a + 2b - 2\sqrt{(aa + ab)}$; ergo pondus omnis aquæ ABCE $= Ma + 2a + 2b - 2\sqrt{(aa + ab)}$: Sic igitur poſito aquas ſtagnare in vaſe & fiſtula, vis requiſita ad ſuſpendendam aquam eſt $= Ma + 2a + 2b - 2\sqrt{(aa + ab)}$.

Jam vero indagabimus vim ſimilem cum aquæ per E tota ſua velocitate (quâ nempe ad altitudinem $a + b$ aſcendere poſſunt) effluunt: hæc autem habebitur, ſi à priori vi ſubtrahatur vis repellens: Si proinde hæc vis repellens ponatur, ut nos ſtatuimus, $= 2a + 2b$, erit vis aquas, durante fluxu ſuſpendens $= Ma - 2\sqrt{(aa + ab)}$.

At vero finge abeſſe tubum CE, & erit per eaſdem noſtras regulas vis ſuſpenſoria, dum aquæ per orificium C erumpunt, rurſus $= Ma - 2\sqrt{(aa + ab)}$, ideo, quia pondus aquæ ABC eſt Ma & quia amplitudo foraminis C eſt $\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a}}$, quæ multiplicata per duplam altitudinem a dat $2\sqrt{(aa + ab)}$. Monſtrat igitur noſtra virium repellentium æſtimatio, vim ſuſpenſoriam durante aquarum effluxu eandem eſſe, ſive nulla ſit fiſtula, ſive adſit & quamcunque habeat longitudinem, modo fiſtula figuram habeat §. 13. Sect. XII. deſcriptam: atque hujus conſenſus & identitatis neceſſitas apparet quoque ſine calculo ex ipſa rei natura, quando fiſtula ita formata nullam in aquis transfluentibus facit mutationem, cum vena aquæ ſua ſponte eandem figuram induit, quam habet fiſtula, quamdiu aquæ cohærent. Sed ſi aliter vim repellentem æſtimemus, nunquam conſenſum illum inter vires ſuſpenſorias generaliter obtinebimus: Ita v. gr. ſi ſecundum ſententiam communem dicamus vim repellentem eſſe æqualem ponderi ſimplicis cylindri ſæpe nominati, erit vis repellens, dum aquæ per canalem CE ex vaſe ACB effluere finguntur $= a + b$; & hæc vis ſi ſubtrahatur à pondere totius aquæ ABCE ſeu $Ma + 2a + 2b - 2\sqrt{(aa + ab)}$, relinquitur $Ma + a + b - 2\sqrt{(aa + ab)}$ quæ eſt vis requiſita ad ſuſpendendum ſyſtema ABCE, dum aquæ fluunt: Vidimus autem hanc vim eandem eſſe debere,

re, ſi canalis CE abſit: Sed tunc eſt vis ſuſpenſorra $= Ma - \surd(aa+ab)$, quia pondus aquæ ABC eſt $= Ma$ & vis repellens per hypotheſin eſt ſimplex cylindrus foramini C ad altitudinem a ſuperinſtructus. Deberet igitur in hâc hypotheſi ſemper eſſe $Ma+a+b-2\surd(aa+ab) = Ma-\surd(aa+ab)$ ſeu $a+b=\surd(aa+ab)$, quod eſt abſurdum. Similis abſurditas demonſtrari poſſet, ſi vena ſurſum verticaliter aſcendere putetur: & fruſtra hic exciperetur pro communi ſententia firmanda, venam effluentem CE fingi non poſſe tanquam continuam, niſi aliqua aquæ tenacitas fingatur ſimul (aliàs enim venam mox præ orificio in guttulas abruptum iri) & tenacitatem rei ſtatum permutare: nam profecto nec velocitates aquæ à cohæſione mutua aquæ in CE mutantur nec latera canalis CE preſſionem ullam ſentiunt, ſicut demonſtravi Sect. XII. §. 13. ut taceam cohæſionem aquæ non oriri à tenacitate ſed ab aliqua virtute magnetica ſeu à mutua attractione, à qua virtute centrum gravitatis in nullo ſyſtemate nec majorem nec minorem velocitatem acquirere poteſt. Sed hæc porro adverſariorum exceptio in venis verticaliter aſcendentibus nullum plane locum habet, cum aquæ ibi continuè maneant, ſi vel nulla aquis inſit tenacitas aut mutua attractio.

At poſſem infinitis aliis modis & exemplis particularibus ſententiam noſtram confirmare, ſi hiſce diutius inſiſtere vellem. Ita v. gr. in Fig. 29. Sect. V. §. 4. deſcripta, ſi ſit altitudo $NS = 1$, orificium $LM = 1$, & orificium $RS = 2$, erit $PB = \frac{1}{3}$, vis repellens, quæ oritur ab effluxu aquæ per RS $= 2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$, & demonſtrare poſſum vim repellentem, quæ prodit ab effluxu aquæ ex ſimplici cylindro RN per LM eſſe etiam $= \frac{4}{3}$, & ſic vim repellentem totalem eſſe $= \frac{8}{3}$, quæ præciſe facit duplum cylindrum aqueum foramini LM ad altitudinem $NS+PB$ inſiſtentem. Talis autem conſenſus ex aliis theoriis falſo receptis minime prodit, ita ut de noſtra amplius non poſſint dubitare, niſi harum rerum penitus ignari: Id vero, quod dixi, vim repellentem aquæ ex ſimplici cylindro RN per LM effluentis eſſe $= \frac{4}{3}$, ſi demonſtrare velim, poſtulat ut vis repellens definiatur, cum aquæ ex vaſe non infinito data velocitate quacunque non variata fluunt: Ne vero prolixior ſim in hâc re, id aliis efficiendum relinquo; neque id nunc amplius magnam faceſſet operam; Pergo ad alia.

§. 12. Demonſtrationes quas adhuc dedimus non valent niſi pro fiſtu-

lis

lis rectis, in quibus nempe uniuscujuſque guttulæ vis motrix, indeque oriunda vis repellens, inter ſe ſingulæ conſpirant, communemque habent directionem: at cum fiſtulæ vaſi implantatæ, per quas aquæ effluunt, ſunt incurvatæ, alius adhibendus eſt demonſtrandi modus: Ut nihil in iſto argumento prorſus novo omittamus, hunc quoque caſum docebimus: nec erit, quod laboris pœniteat, cum inde veræ preſſionum leges, quas natura non ſolum in his caſibus, ſed & multis aliis ſequatur, apparebunt.

§. 13. Concipiamus itaque vaſi infinito fiſtulam implantatam eſſe uniformis quidem amplitudinis, ſed incurvatam ſecundum curvaturam qualemcunque AS (Fig. 83.) ita ut A locus ſit inſertionis, S locus effluxus: Du- Fig. 83.
cantur tangentes in A & S, nempe AR & SB, ſitque AB ad SB perpendicularis: fuerit velocitas aquæ per fiſtulam transfluentis uniformis & talis, quæ debeatur altitudini A; amplitudo fiſtulæ ubique $= 1$: *Dico totam vim repellentem in directione SB ſumtam fore rurſus* $= 2A$, hancque ſolam adfore.

Demonſtrationis gratia ducantur infinite propinquæ nq, ep ad SB perpendiculares; nm parallela eidem SB; ſit $Sq = x$, $qp = dx$; $qn = y$; $em = dy$: erit radius oſculi in $en = \frac{-ds\,dy}{ddx}$, ſumtis elementis en quæ vocabo ds pro conſtantibus; habet autem columella aquæ intercepta inter e & n vim centrifugam, ſic determinandam: gravitas columellæ eſt $= ds$ (quia baſis ejus $= 1$ & altitudo $= ds$) atque ſi radius oſculi foret $= 2A$, haberetur per theorema Hugenianum vis centrifuga particulæ æqualis ejusdem gravitati, & ſunt vires centrifugæ cæteris paribus in reciproca ratione radiorum: eſt igitur vis centrifuga columellæ $= \frac{-2A\,ddx}{dy}$: exprimatur hæc vis centrifuga per ec ad curvam perpendicularem, ducaturque co ipſi BS parallela: reſolvatur vis ec in oc & eo; erit (ob ſimilitudinem triangulorum eoc & nme) vis $oc = \frac{-2A\,ddx}{ds}$, vis $eo = \frac{-2A\,dx\,ddx}{dy\,ds} =$ (ob ds conſtans) $\frac{2A\,ddy}{ds}$.

Sed vis elementaris oc agit ſola in directione SB, dum altera eo pro hac directione eſt negligenda: ſumatur integrale vis elementaris oc cum conſtanti tali, ut integrale una cum abſciſſa evaneſcat: integrale hoc eſt $= 2A$

$- \frac{2Adx}{ds}$, quia in S eſt $dx = ds$: Nunc ut habeatur vis in directione tangentis S B pro tota fiſtula, ponendum eſt $\frac{RB}{RA}$ pro $\frac{dx}{ds}$, ergo tota vis ſecundum tangentem S B $= 2A - \frac{2A \times RB}{RA}$. Hæc vero oritur à vi centrifuga cujusvis guttulæ: ſed alia vis ſupereſt conſideranda; nempe dum aqua ex vaſe infinite amplo continue in fiſtulam influit velocitate uniformi reſpondente altitudini A, vas repellitur ſecundum directionem R A vi 2 A (per §. 4.) quâ reſoluta in tangentialem ſecundum S B eique perpendicularem ſecundum B A, prior $\frac{2A \times RB}{RA}$ erit ſola conſideranda; & quia habet directionem communem cum vi $2A - \frac{2A \times RB}{RA}$ à vi centrifuga oriunda & modo definita, erit eidem addenda: ſicque ſumma $2A - \frac{2A \times RB}{RA} + \frac{2A \times RB}{RA}$ vel 2 A exprimet vim repellentem ſecundum directionem S B.

Ut porro demonſtremus ſub nulla alia directione vas repelli, recurremus ad vim elementarem *eo*, quam vidimus $= \frac{2Addy}{ds}$, cujus integrale $= \frac{2A \times AB}{AR}$, quæ præciſe annihilatur à vi 2 A vas repellente ſecundum directionem R A, poſtquam hæc debite reſoluta fuit. Q. E. D.

§. 14. Hæc theorematis generaliſſimi ſimplicitas, quâ nempe vis repellens in directione aquis uniformiter effluentibus contraria indicatur conſtanter $= 2A$, *argumentum* eſſe poteſt, quod dicitur *ad hominem* pro ejusdem bonitate, iis qui ratiocinium noſtrum aut non aſſequentur aut examinare non cupient ſufficienti attentione. Si vero vim repellentem aquæ ex vaſe infinito in fiſtulam influentis ſub directione A R ſtatuas $= A$, vides ſyſtema repelli in directione S B vi quæ ſit $= 2A - \frac{A \times RB}{RA}$, quod abſurdum eſſe vel ipſa mihi indicare videtur formula. Neque in hâc opinione nulla eſſet vis in directione ad priorem perpendiculari: Nam vas deberet reprimi ſecundum directionem B A vi $\frac{A \times AB}{AR}$, quod iterum mihi eſt abſurdum & cujus falſitatem experimento cognovi, in caſu quo angulus A R S erat rectus & A B $=$ A R.

Mul-

Multa alia theoremata pro hoc argumento in tota ſua, quam habere poteſt, extenſione, ſumto erui & demonſtrari poterunt, pro fluxu aquarum nondum uniformi eoque per fiſtulam utcunque inæqualem, modo ſimul attendatur ad ea, quæ §. 8. monita fuerunt. Quia vero per ſingula ire non vacat, ad aliam progredior vim examinandam priori ſub directione contraria æqualem, illam nempe quam vena effluens in planum exerit, dum in illud perpendiculariter impingit.

§. 15. De impetu venæ aqueæ in planum impingentis multi commentati ſunt, plurimaque ſumſere experimenta. Ego quoque hâc de re quædam dedi in *Comm. Acad. Sc. Petrop. tom.* 2. Experimenta extant apud Mariottum in *tract. de mot aquarum*, in *hiſt. Acad. Sc. conſcripta a D. du Hamel.* p. 48. & alibi. Equidem non admodum conveniunt, plurima tamen indicare prima fronte videntur niſum venæ aqueæ uniformiter fluentis æqualem eſſe ponderi cylindri aquei, cujus baſis ſit foramen, per quod aquæ effluunt & cujus altitudo ſit æqualis altitudini aquæ ſupra foramen: Huic ſententiæ plerique imo omnes, adhæſerunt & adhuc adhærent, quia cum aliis quoque experimentis, præſertim quæ de globis in medio reſiſtente motis ſumi ſolent, mire convenit: Eandem igitur ipſemet ſecutus ſum, quamvis plura animum ſuſpendebant, in *cit. Comm. Petrop.* nec hæſitavi in ipſo hoc opere, quod ſub manibus habeo, Sectione nempe IX. §. §. 31. 32. illa inſtar exempli uti. Verum enim vero re attentius perpenſa, novisque adhibitis principiis, ſimulque aliis novi generis experimentis inſtitutis, clare tandem vidi communem iſtam opinionem de impetu venæ aqueæ eodem modo mutandam eſſe, ſicuti Newtoni de vi repellente, ſcilicet ut loco orificii conſideretur ſectio venæ contractæ & loco altitudinis aquæ adhibeatur dupla altitudo velocitati aquarum reali reſpondens: Demonſtratum enim habeo, vim repulſionis §. 2., expoſitam omnino æqualem eſſe impetui venæ, ſi hæc tota in planum perpendiculariter incidat: ſequitur inde impetum venæ majorem eſſe, quo minor fuerit venæ contractio, hâcque plane evanescente, & aquis ſimul tota ſua velocitate, quam in theoria habere poſſunt, erumpentibus, tum impetum duplo majorem eſſe, quam vulgo ſtatuitur: quia vero ſemper & velocitati aliquid decedit & vena non raro ad dimidium fere contrahitur, factum eſt ut experimenta pleraque ſimplam in Cylindro altitudinem arguere viſa fuerint in impetu illo æſtimando. Velim autem probe notetur, de venis ſolitariis tantum mihi hic ſermonem eſſe, quas

plana totas excipiant, non autem de fluidis corpora ambientibus in eademque impetum facientibus, veluti de Ventis aut fluminibus: dico enim hos duplicis generis impetus quos auctores adhuc confuderunt, probe à ſe invicem diſtinguendos eſſe, ob rationes infra breviter exponendas.

§. 16. Ratione venæ aqueæ ſic cenſeo: aquas velocitate uniformi ex
Fig. 84. cylindro infinite amplo verticali A B M (Fig. 84.) per foramen laterale C M horizontaliter effluere pono, venamque perpendiculariter impingere in laminam E F: ita facile video, quia particulæ inſequentes priores impediunt ne reſilire poſſint, fore ut ſingulæ ad latera deflectantur, idque motu laminæ E F (ſi modo hæc ſat magna fuerit, ut vena tota quamvis diſperſa excipiatur) parallelo vel tantum non tali: Et quia omnia ſunt in *ſtatu permanentiæ*, fingere licet laminam E F vaſi eſſe affirmatam, venamque lateribus C H D G L M circumdatam, ita, ut aquæ per hiatum circularem D E G F effluere ex vaſe A B C H D E F G L M cenſeri poſſint. Hoc ſi ita fuerit, demonſtravimus §. 13. guttulas in D E effluentes vim repellentem quidem producere ſecundum E F; ſed ſimul apparet vim repellentem eſſe in G F priori contrariam ita ut ad hanc virium repellentium claſſem hic non ſit attendendum. Quod vero ad directionem, laminæ E F vel cylindro B C, perpendicularem attinet, demonſtravimus in fine ejuſdem §. 13. ſub ea directione plane nullam fieri repulſionem: Igitur tantum lamina E F propellitur, quantum cylindrus repellitur. Idque eſt quod demonſtrare volui: Atque inde jam ſequitur, *preſſionem venæ aqueæ, quæ tota in laminam incurrit, tantam eſſe quanta pondus cylindri aquei, qui pro baſe habeat ſectionem venæ (poſtquam hæc uniformem acquiſivit amplitudinem) & pro altitudine duplam altitudinem velocitati aquarum (poſtquam hæc ſimiliter uniformis facta eſt) debitam.*

§. 17. Non dubito multos fore, quibus propoſitio hæc plane nova ſuſpecta videatur atque experimentis contraria: Hos vero perpendere velim, experimenta hactenus ſumta nequaquam regulæ communi accurate reſpondere, & in pleriſque caſibus noſtram Regulam parum differre à communi, quamvis in theoria maxime ſint diverſæ: tum etiam eos in anteceſſum monitos cupio, alia me inſtituiſſe experimenta; quæ ſingula meam ſententiam exactiſſime confirmant, veteremque plane refellunt! experimenta a me ſumpta in fine Sectionis recenſebo. Demonſtrandi modus quo uſus fui, fortaſſe etiam parum vide-

videbitur quibusdam accuratus, habeo autem aliam demonſtrationem directam, quæ nova proprietate innititur Mechanica mihi aliquando obſervata, quamque hic communicabo, tum quia dictam demonſtrationem facillime quivis inde deducere, tum etiam quia ad alios uſus eandem impendere poterit: Ita autem ſe habet.

Si corpus movetur velocitate uniformi, directiones autem ſuas continue mutat à cauſis quibuſcunque & utcunque agentibus, donec directionem acquiſiverit perpendicularem ad primam directionem, ſique ſingulæ preſſiones corpus deflectentes reſolvantur in duas claſſes, alteram parallelam primæ directioni, alteram perpendicularem; Denique ſi preſſiones ſingulæ parallelæ multiplicantur per ſua tempora; dico fore ſummam productorum conſtanter eandem, & quidem æqualem ei, quæ totum motum à quiete generare aut generatum totum abſorbere valet.

Hâc affectione Dynamica, cum utimur in præſenti noſtro negotio, conſideranda eſt lamina E F, quæ ſua in aquas reactione, earundem directionem mutat, uſque dum perpendicularis ad primam facta fuerit: Ergo propoſitio præcedentis paragraphi ope hujus affectionis eodem modo demonſtrabitur, quo uſi ſumus §. 4. ad determinandam vim repellentem ope principii §. 3. expoſiti. Hæc igitur vera idea videtur, quam de impetu aquarum mente concipere debemus: ponit autem guttas aquæ ſingulas ſecundum directionem laminæ ad latera reſilire, à quâ indole aquas non recedere ſemper obſervavi: vidi tamen etiam guttulas aliquas ſed paucas retrorſum reſilire; hæ autem majorem preſſionem producunt, quam quæ ad latera deflectuntur: Et eo ipſo inducor, ut firmiter credam, ſi vena aquea magno impetu oblique contra planum impingat, v. gr. ſub angulo triginta graduum, preſſionem inde orituram pluſquam dimidiam ejus, quæ à vena eadem directe impingente oritur, cum ſecundum regulas ordinarias exactè dimidiam vim exerere deberet: ratio ejus rei eſt, quod in impulſu obliquo plures particulæ reſilire poſſint, quam in directo, imo fere omnes, ſi magna fuerit velocitas.

Si autem omnes ita reſilire ponantur, ut angulus incidentiæ angulo reflexionis æqualis ſit, tunc uterque impulſus idem cenſendus erit. Optimus hic aquarum preſſiones æſtimandi modus eſt, qui ratiocinio à *poſteriori* innititur.

§. 18. Sequitur porro ex præfata affectione probe intellecta, eundem oriri à preſſionibus effectum ſive lamina aquas ad latera deflectat, ſive cauſa fingatur motum omnem, quem particulæ aqueæ cylindrum egreſſæ acquiſiverunt, abſorbens: Inde intelligitur quid futurum ſit, ſi orificium C M (Fig.85.)
Fig.85. per quod aquæ ex cylindro A B M effluunt, aliis aquis in vaſe P Q F E ſtagnantibus ſubmerſum fuerit: repelletur nempe cylindrus A B M verſus P Q intra vas P Q F E, ſi hoc cum cylindro non cohæreat; At ſi vaſa inter ſe fuerint firmata, nullam patietur ſyſtema preſſionem prævalentem; quanta enim eſt preſſio verſus P Q ab effluentibus aquis, tanta quoque oritur preſſio contraria verſus E F à continua deſtructione motus, quem particulæ cylindrum egreſſæ acquiſivere.

§. 19. Dixi de preſſione venæ, quam lamina totam etiamſi expanſam excipit: Venio ad alteram ſpeciem impetus aquarum, quem ſcilicet ſuſtinent laminæ fluido undique ſubmerſæ: puto autem hanc non poſſe *abſolute* definiri, quia ſingulæ particulæ in laminam impingentes aliter deflectuntur. Si vero cujuslibet particulæ deviatio cognita ponatur, non difficilis erit amplius quæſtionis ſolutio, mutato paullum theoremate, quo §. 17. uſi ſumus eoque generaliori reddito, nempe tali: *ſi angulus mutatæ in corpore moto directionis non fuerit rectus, ſed recto minor, tunc quoque minor erit ſumma productorum (de quâ antea ſermo fuit) in ratione ut ſinus verſus mutatæ directionis ad ſinum totum.*

Igitur pro quâvis guttula indagandum eſſet, quantum directionem motus ab obice, ſeu lamina curſui oppoſita mutare cogatur. At in theoria hujuſmodi definitiones exhiberi accurate vix poſſunt; nec experientia probat theoremata hanc in rem exhiberi ſolita; veluti quod conatus fluminis directe contra circulum impingentis duplo ſit major conatu ejuſdem fluminis contra ſphæram ejuſdem diametri, & quæ ſunt ſimilia: quod autem quantitas preſſionis pro ſphæra, qualis dari ſolet ab auctoribus, cum experimentis à Newtono aliiſque inſtitutis & in *princ. math. phil. nat.* recenſitis, ſatis accurate conveniat, id omnibus bene perpenſis caſui fortuito tribuendum eſſe cenſeo.

Theoremata quæ ad motum in mediis reſiſtentibus theoretice conſideratum faciunt, tum etiam varias obſervationes phyſicas dedi in *tom. II. Comm. Acad. Sc. Petrop. & ſeqq.* Neque proinde ea hic repetam, quamvis ad inſtitutum noſtrum pertineant; diutius meditationibus hiſce hydrodynamicis immorari non vacat.

vacat : Igitur ad finem propero. Novam hanc circa reactionem & impetum fluidorum theoriam, quæ receptam ab omnibus adhuc auctoribus opinionem evertit in re magni momenti, ſingulari Diſſertatione proſecutus ſum, quæ ſuo tempore *Commentar. Academ. Scient. Imp. Petropol.* inſeretur eandemque indubitatis confirmavi experimentis. Venio nunc ad argumentum aliud, Geometrarum attentione minime indignum.

§. 20. Mentem aliquando ſubiit, poſſe ea quæ de vi repellente fluidorum, dum ejiciuntur, meditatus fueram, quæque hic maximam partem expoſui, utiliter applicari ad novum inſtituendum navigationis modum: neque enim video, quid obſtet, quo minus maximæ naves ſine velis remiſque eo modo promoveri poſſint, ut aquæ continue in altum eleventur effluxuræ per foramina in ima navis parte, faciendo ut directio aquarum effluentium verſus puppim ſpectet. Ne quis vero opinionem hanc in ipſo limine rideat, ceu nimis inſulſam, è re erit noſtra argumentum iſtud accuratius excutere & ad calculum revocare: utile enim eſſe poteſt multisque diſquiſitionibus geometricis eſt fertiliſſimum.

Incipiam ab eo, ex quo deinde apparebit, ſub quibus circumſtantiis maximus ſucceſſus à nova iſta navigatione expectari debeat.

§. 21. Notandum igitur eſt, navem ab hauſtis aquis continue retardari ob inertiam earundem, quando illis eadem velocitas communicatur quacum navis fertur & dum communicatur, navis à reactione aquarum retrorſum urgetur, ſimul ac ab earundem effluxu antrorſum premitur. Iſte actionum contrariarum concurſus limites ponit vi naves propellenti à data potentia abſoluta obtinendæ: niſi enim actio prior adeſſet (de qua ut verum fatear diu non cogitavi) poſſet *labore hominum quantumvis parvo vis naves propellens utcunque magna obtineri*, quod ſic demonſtro.

In ſectione nona (vide præſertim §. 26.) oſtendi, laborem hominum in elevandis aquis impenſum, quem voce *potentiæ abſolutæ* deſigno, æſtimandum eſſe ex producto quantitatis aquarum in altitudinem elevationis, ita ut verbi gratia labore ſecundum omnes menſuras eodem poſſint & quatuor pedes cubici ad altitudinem ſedecim pedum & ſedecim pedes cubici ad alitudinem quatuor pedum elevari: Dico nunc porro preſſionem uniformem, naves antrorſum propellentem adeſſe, quamdiu fluida velocitate æquali effluunt, quæ preſſio æſtimanda ſit ex quantitate aquarum effluentium & ex radice al-

titudinis aquarum in vaſe ſupra foramen poſitarum : fuerit enim quantitas aquarum dato tempore effluentium $= Q$; altitudo earum $= A$, erit magnitudo foraminis aquas eructantis proportionalis cenſenda quantitati $\frac{Q}{\sqrt{A}}$ pro eodem tempore: at vero vis repellens, quæ hic navem promovet, æqualis eſt magnitudini foraminis ductæ in duplam altitudinem aquarum (per §. 4.) id eſt, æqualis quantitati $\frac{Q}{\sqrt{A}} \times 2 A$ ſeu $2 Q \sqrt{A}$. Ex comparatione utriusque propoſitionis ſequitur laborem hominum in elevandis aquis exantlatum eſſe ad vim naves propellentem inde obtinendam, ut QA ad $2 Q \sqrt{A}$ ſive ut $\sqrt{A}$ ad quantitatem aliquam conſtantem : igitur quo minor eſt altitudo ad quam aquæ elevantur, eò major vis naves promovens ab eodem labore obtinetur, *ita ut labore hominum quantumvis parvo vis naves propellens utcunque magna obtineri poſſit*. Verum etiam inertia aquarum, quæ hauriuntur, (de qua ab initio hujus paragraphi diximus) naves retardans eo majorem obtinet rationem ad vim naves propellentem, quo minor aſſumitur altitudo A, ad quod animus hic probe eſt advertendus.

§. 22. Perſpicuum eſt ex præcedente paragrapho, altitudinem ad quam aquæ ſunt elevandæ eſſe ex earum claſſe, quæ alicubi maximæ ſunt. Ut vero altitudo maxime ad propoſitum proficua determinetur, aliæ nobis ſe offerunt quæſtiones prius examinandæ.

Problema.

Ponatur navis uniformi progredi velocitate, quæ generatur lapſu libero per altitudinem B, fingaturque aquas continue affluere in navem, veluti ſub forma pluviarum, & quidem tanta quantitate, quantam remotis omnibus impedimentis alienis ſuppeditaret cylindrus conſtanter plenus ad altitudinem A per orificium magnitudinis M. Quæritur quantam reſiſtentiam navis ab iſto perpetuo & uniformi aquarum affluxu earundemque inertia patiatur.

Solutio.

Aſſumatur tempus quodcunque t, quod ſi æſtimetur ex ſpatio, quod fluidum affluens ſua velocitate percurrit, diviſo per eandem velocitatem, tunc velo-

velocitas eſt exprimenda per $\sqrt{2A}$ & erit quantitas aquæ tempore t affluens æqualis cylindro ſuper baſi M conſtructo longitudinis $t\sqrt{2A}$: iſta vero quantitas tempore t, dum à nave aufertur, accipit velocitatem debitam altitudini B & exprimendam per $\sqrt{2B}$: quærenda itaque eſt vis uniformis, quæ poſſit tempore t, cylindro aqueo $Mt\sqrt{2A}$ communicare velocitatem $\sqrt{2B}$ & erit iſta vis ob reactionem, quæ in navem reagit, æqualis cenſenda reſiſtentiæ quæſitæ. Sit præfata vis $= p$, puteturque dediſſe tempore θ velocitatem v cylindro aqueo $Mt\sqrt{2A}$ & erit $dv = \frac{p\,d\theta}{Mt\sqrt{2A}}$, atque $v = \frac{p\theta}{Mt\sqrt{2A}}$: ponatur jam $\sqrt{2B}$ pro v & t pro θ eritque $\sqrt{2B} = \frac{p}{M\sqrt{2A}}$ ſive $p = 2M\sqrt{AB}$.

Eſt igitur reſiſtentia quæſita æqualis ponderi cylindri aquei, cujus baſis eſſet æqualis orificio M & cujus longitudo æqualis duplæ mediæ proportionali inter altitudines A & B.

Problema.

§. 23. Sit in navi cylindrus altitudinis ſupra ſuperficiem maris A, per cujus orificium in eadem ſuperficie poſitum amplitudinis M aquæ verſus puppim effluant ſine ullo impedimento, conſerveturque cylindrus aqua conſtanter plenus, determinare potentiam navem continue propellentem.

Solutio.

Potentia navem propellens eſt æqualis reactioni aquarum dum effluunt, ſeu vi repellenti diminutæ potentia in præcedente paragrapho definita ab inertia aquarum, quæ continue hauriuntur, oriunda. Vis repellens eſt æqualis, per paragraphum hujus ſectionis quartum, $2MA$ & hæc navem promovet: vis altera quæ navem retardat eſt per præcedentem paragraphum $= 2M\sqrt{AB}$. Eſt igitur potentia abſoluta navem promovens $= 2MA - 2M\sqrt{AB}$.

Corollarium.

§. 24. Si navis nullam habeat velocitatem, erit vis navem urgens $= 2MA$; atque ſi navis eadem velocitate movetur qua aquæ in plagam contrariam effluunt, fit $B = A$ & tunc navis nulla vi propellitur. Si proinde navis

vis vel liberrime moveretur ſuper mari, non acquireret tamen ab actione aquarum, quæ continue hauriuntur inferiusque effluunt, majorem velocitatem quam eam, qua aquæ effluunt, non quod aquæ ex vaſe uniformiter moto effluentes vas minori vi quam ex vaſe immoto repellant, ſed quod tunc inertia aquarum reſiſtentiam producat vi repellenti æqualem.

Problema.

§. 25. Data potentia operariorum, qui aquas elevant, & data altitudine ad quam aquæ elevantur, invenire amplitudinem foraminis effluxus & vim repellentem.

Solutio.

Sit potentia talis, qua ſingulis minutis ſecundis numerus pedum cubicorum aquæ N poſſit ad altitudinem unius pedis elevari, quam potentiam vi experimenti ſecundi ſectioni nonæ ſubjuncti exerere poteſt operariorum numerus deſignandus per $\frac{5}{4}$N. Sit altitudo ad quam aquæ continue elevantur $=$ A in pedilus expreſſa: amplitudo orificii in pedibus quadratis $=$ M; erit numerus pedum cubicorum aquæ, quem operarii data potentia ad altitudinem A ſingulis minutis ſecundis elevare poſſunt, $= \frac{N}{A}$ (per §. 22. *ſect.* 9.) erit igitur orificium ejus amplitudinis conſtruendum, ut ſingulis minutis ſecundis numerus iſte pedum cubicorum aquæ per id effluere poſſit, ſi liberrime effluant. Sumamus autem loco minutorum ſecundorum tempus, quod corpus inſumit, dum libere cadit per altitudinem A: tempus id eſt hic exprimendum $\frac{1}{4}\sqrt{A}$, (poſito concinnioris calculi gratia corpus à quiete libere cadens intra minutum ſec. abſolvere 16. *ped.*) & hoc tempore debet effluere numerus pedum cubicorum aquæ deſignandus per $\frac{N}{A} \times \frac{1}{4}\sqrt{A}$ ſeu $\frac{N}{4\sqrt{A}}$: effluit autem revera 2 MA, nempe cylindrus aqueus cujus baſis eſt M & cujus longitudo facit duplicem altitudinem A: eſt igitur $\frac{N}{4\sqrt{A}} = 2MA$; unde amplitudo orificii ſeu

$$M = \frac{N}{8A\sqrt{A}}.$$

Vis autem repellens fit æqualis 2 M A ſeu $= \frac{N}{4\sqrt{A}}$.

Scho-

Scholium.

§. 26. In quavis nave aquæ ad aliam atque aliam altitudinem ſunt elevandæ, ut eadem potentia, quæ in hauriendis aquis inſumitur, vis navem promovens maxima obtineatur & duo requiruntur ad altitudinem illam utiliſſimam definiendam pro certo operariorum numero. *Primo* ut cognitum ſit quamnam velocitatem propoſita navis à data potentia acquirat: ratione hujus poſtulati, ponemus navem à preſſione, quæ ſit æqualis ponderi unius pedis cubici aquæ ſeu circiter 72 librarum acquirere velocitatem, quæ generetur lapſu libero per altitudinem C, & quia deinceps ſemper. in pedibus menſuras omnes exprimemus, erit pondus unius pedis cubici aquæ exprimendum per unitatem. *Secundo* pro cognita aſſumenda eſt relatio inter celeritates navis & potentias navem propellentes: ſtatuitur hic vulgo velocitates habere rationem ſubduplicatam virium propellentium, experimenta quidem hanc hypotheſin non exactè confirmant in motibus lentis; interim tamen eam reliquis omnibus præferendam cenſemus. Si quis velit rem ſub alia hypotheſi explorare, is poterit eodem modo, quo nunc utemur, calculum inſtituere.

Problema.

§. 27. Invenire altitudinem, ad quam aquæ continue elevandæ ſunt, inſtituto utiliſſimam, nempe talem, ut eadem potentia in elevandis aquis adhibenda vis navem promovens maxima oriatur.

Solutio.

Serventur denominationes omnes in hoc argumento adhibitæ: erit ante omnia inquirenda velocitas navis ſeu altitudo huic velocitati debita quam vocavimus B. Quia vero velocitates navis ponuntur proportionales radicibus potentiarum navem urgentium, erunt altitudines velocitatum ipſis potentiis proportionales. Erit igitur talis analogia inſtituenda.

Sicuti pondus unius pedis cubici ad altitudinem C (conf. §. 26.) ita preſſio navem urgens ſeu $2MA - 2M\sqrt{AB}$ (vid. §. 23.) ad altitudinem velocitati navis reſpondentem, quæ proinde erit $2MC \times (A - \sqrt{AB})$: Hanc vero altitudinem vocavimus B: Eſt itaque

$$B = 2 MC \times (A - \sqrt{AB}).$$

Exinde fit preſſio navem urgens $= \frac{B}{C}$, atque adeo proportionalis altitudini B, quia C eſt quantitas conſtans: ergo & preſſio navem promovens & altitudo navis velocitati reſpondens ſimul fiunt maximæ: Igitur ſi pro præſenti inſtituto differentietur quantitas $2 MA - 2 M \sqrt{AB}$, quæ preſſionem navem propellentem exprimit, poterit poni $dB = o$. Prius vero quam differentiatio inſtituatur oportet pro M ſubſtituere valorem ejus §. 25. & tunc fit preſſio navem promovens $= \frac{N}{4\sqrt{A}} - \frac{N\sqrt{B}}{4A}$, in qua littera N eſt conſtans, litteræ vero B & A variabiles. Sumatur nunc ejus differentiale, faciendo $dB = o$, idque fiat $= o$; atque ſic reperietur $A = 4B$.

Eſt igitur vis navem promovens maxima cum altitudo, ad quam aquæ elevantur, eſt quadrupla altitudinis velocitati navis debitæ.

Ponatur in æquatione $B = 2 MC \times (A - \sqrt{AB})$ ſuperius inventa $A = 4B$ & reperietur

$$M = \frac{1}{4C},$$

& quia (per §. 25.) eſt $M = \frac{N}{8A\sqrt{A}}$, fit tunc

$$A = (\tfrac{1}{2} NC)^{\frac{2}{3}}, \text{ atque}$$

$$B = \tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{2} NC)^{\frac{2}{3}}.$$

Corollarium.

§. 28. Si ad præceptum præcedentis paragraphi orificio, per quod aquæ inferius ex canali verſus puppim effluunt, concilietur amplitudo $\frac{1}{4C}$, id eſt, talis, quæ ſe habeat ad amplitudinem unius pedis quadrati, ſicuti menſura unius pedis, ad altitudinem quadruplam velocitati navis, vi 72. librarum animatæ, debitam, fiet tunc ut navis dimidia velocitate feratur ejus qua aquæ effluunt & erit vis repellens aquarum effluentium

$$2 MA = \frac{1}{2C} \times (\tfrac{1}{2} NC)^{\frac{2}{3}},$$

vis

vis vero navem promovens hujus erit dimidia, adeo ut dimidius effectus perdatur ab inertia earundem, quæ continue hauriuntur, aquarum.

Scholium.

§. 29. Poſtquam ſic demonſtravimus, quomodo utiliſſime maximoque cum ſucceſſu iſte navigandi modus ſit inſtituendus, nunc porro rem iſtam exemplo illuſtrandam eſſe puto tali, quod cum ipſa rei natura non male convenire crediderim ut ſimul appareat, qualis præterpropter eventus futurus ſit.

Conſideremus triremem, vulgo *galeram*, cum 260 remigibus: ponamus hanc galeram pondere unius pedis cubici aquæ ſeu 72. librarum tractam perficere ſingulis minutis ſecundis ſpatium duorum pedum, cujus velocitatis altitudo genitrix indicata per C eſt $= \frac{1}{16}$, poſito corpus grave libere à quiete decidens primo minuto ſecundo perficere 16. *ped.* Quia porro 260. operarii adhibentur, quorum quivis vi experimenti ſecundi ad *Sect.* 9. pertinentis poteſt ſingulis minutis ſecundis quatuor quintas partes pedis cubici ad altitudinem unius pedis elevare, erit $N = \frac{4}{5} \times 260 = 208$. Fiat igitur orificium, per quod aquæ effluant, amplitudinis 4 pedum quadratorum: poteruntque operarii aquam in canali ſupra orificium elevatam conſervare ad altitudinem proxime $3\frac{1}{2}$ *ped.* quæ indicatur litera A, & ſi ſumas hujus altitudinis quartam partem habebis $B = \frac{7}{8}$ *ped.* adeo ut navis tali velocitate ſit iſta navigatione progreſſura, quam grave acquirit lapſu libero per altitudinem $\frac{7}{8}$ *ped.* ſic ergo navis ſingulis minutis ſecundis ſpatium $7\frac{1}{2}$ *ped.* perficiet & ſingulis horis 27000 *ped.* id eſt, plus duobus milliaribus gallicis: tanta navis velocitas remigatione vix ac ne vix quidem obtineri poteſt.

Jam vero calculum alia hypotheſi ſuperſtruam, quam rei nauticæ intelligentes non admodum improbaturos eſſe, confido: quadrat enim cum multis, quos ipſe ſuper mari feci, obſervationibus: ſupponam vela triremis perpendiculariter ad carinam expanſa ſuperficiem habere 1600 pedum quadratorum, hæcque ventum excipere directe impingentem, qui ſingulis minutis ſecundis ſpatium percurrat 18. *ped.* navem vero in eadem directione ſic ſingulis minutis ſecundis ſpatium perficere 6 pedum. Ita ventus in vela incurret velocita-

te reſpectiva 12 pedum: vim iſtius venti æſtimo = ponderi $\frac{9 \times 1600}{850}$ *ped. cub.* aquæ, ſeu fere 17. *ped. cub.* aquæ.

Hæc ſi ita ſint, ſequitur navem ab elevatione aquarum 260. operariorum poſſe ea velocitate propelli, qua ſingulis minutis ſecundis ſpatium percurrat $6\frac{1}{2}$. pedum.

Æſtimatio non admodum diverſa ſequitur ex iis, quæ D. Chazelles habet in *Comm. Acad. Reg. Sc. Pariſ. ad ann.* 1702. *p.* 98. *edit Pariſ.* Ut vero recte ad inſtitutum noſtrum applicari poſſint, notandum erit in remigatione, vim triremem propellentem non eſſe æſtimandam ex preſſione remigum in remos, ſed ex preſſione, quam remorum extremitates aquis ſubmerſæ contra aquas exerunt. Ut hanc proxime definiamus, hæc prius erunt obſervanda. Remiges fuere adhibiti 260. totis viribus remigantes: ſingulis minutis primis remorum impulſus (gallicè *palades*) facti ſunt 24: integra remorum agitatio tribus abſolvitur motibus, quos ejuſdem durationis ponam, eorumque unus ſolus triremem promovet: hoc modo triremis velocitate fuit provecta, qua ſingulis minutis ſecundis ſpatium $7\frac{1}{5}$. *ped.* abſolvebat, pars remi intra navem fuit 6. pedum & extra navem 12. pedum: ſuperficies autem (gallicè *les pales*) omnium remorum, quæ contra aquas impelluntur, in unam collectæ D. Chazelles facit 130. pedum quadratorum: notavit porro extremitatem internam remi ſingulis agitationibus ſpatium deſcribere ſex pedum: & quia quævis agitatio tempore $\frac{60}{24}$. unius minuti ſecundi abſolvitur ſimulque ex tribus conſtat motibus, quos pono tautochronos, apparet quamvis remi retractionem fieri tempore $\frac{20}{24}$. ſeu $\frac{5}{6}$. unius minuti ſecundi & hoc tempore extremitas remi interna abſolvit ſpatium 6. pedum. Porro ob longitudinem ſuperficiei remorum, quæ contra aquas impellitur, non tota eſt ad diſtantiam 12. pedum cenſenda: illam igitur diſtare ponam 10. pedibus, quaſi nempe pars remi extra navem promineret 10. pedes longa: hujus partis extremitas deſcribet 10. pedes tempore $\frac{5}{6}$ unius minuti ſecundi: quia vero ipſa triremis velocitatem habet, qua eodem tempore ſex pedes abſolvit, cenſendum eſt, remorum extremitates contra aquam impelli velocitate reſpectiva, qua tempore $\frac{5}{6}$. min. ſec. 4. pedes deſcribat: igitur vis triremem propellens eſt æqualis vi, quam aqua contra ſuperficiem 130. pedum quadratorum exereret, ſi velocitate in illam incurreret, qua tempore $\frac{5}{6}$ *min. ſec.* 4. *ped.* abſolvat: hanc vim ſecundum vulgarem

garem æſtimationem invenio præter propter æqualem ponderi 40. *ped. cub.* aquæ; iſta vero vis non continue applicatur, ſed tantum eo tempore quo remi retrahuntur: ſunt igitur duo trientes iſtius vis auferendi, ita ut vis quæ triremem continue propellat, cenſenda denique ſit æqualis ponderi $13\frac{1}{3}$. *ped. cub.* aquæ.

Exinde ſequitur, ſi velocitates navis rationem ſequi ſubduplicatam virium propellentium ponantur, quod eadem hæc triremis pondere unius pedis cubici aquæ impulſa velocitatem habitura fuiſſet, qua poſſit ſingulis minutis ſecundis perficere proxime duos pedes; quæ hypotheſis eadem eſt, cum illa quam primo loco adhibuimus, ita ut rurſus exinde ſequatur triremem velocitatem ab iſta navigatione acquiſituram eſſe, qua poſſit perficere ſingulis minutis ſecundis $7\frac{1}{2}$ pedes, quæ velocitas tantillo major eſt illa, quæ triremi remigatione fortiſſima 260. remigum data fuit.

Rebus bene perpenſis hæſito, utrum navigationis genus ſit præferendum, an remigatio, an aquarum elevatio, ſucceſſum fere æqualem crediderim utriuſque, & pro certo affirmare audeo, ſi minus promoveatur navis ab aquarum elevatione, defectum parvum fore: fortaſſe autem promovebitur magis. Interim non dubito, quin nova iſta navigationis idea harum rerum ignaris vana & ridicula appareat. Ego vero aliter ſentio velimque ut animus porro ad ſequentia advertatur.

Primo. Quod aquæ in omni navium genere, ubi remi plane adhiberi nequeunt, commode elevari poſſunt, ita ut nova iſta navigatione naves etiam bellicæ prægraves, quibus in pugnis navalibus utuntur, deficiente omni vento, quo lubet agi poſſint.

Secundo. Quod ſic in theoria exemplum habetur, dari vires motrices ſive propellentes, quæ dici poſſunt intrinſecæ: Excitabuntur iſto exemplo ingenia ad excogitanda hujuſmodi alia motus principia eaque magis perficienda & ad navigationis uſum adhibenda.

Tertio. Quod multis modis ſublevari poteſt labor hominum in elevandis aquis ſecus atque fieri poteſt in remorum uſu: ſunt nempe res naturales inſigni & fere incredibili virtute præditæ eæque mediocri pretio comparandæ, quibus idem quod labore hominum effici poteſt: harum uſus præſertim bre-

vibus trajectibus ſerena & tranquilla tempeſtate inſtituendis inſervire poſſet. De virtute iſtiuſmodi rebus naturalibus inſita, de effectibus inde obtinendis horumque menſuris egi in Sect. X. §. 40. & ſequentibus: imprimis autem velim ut attendatur ad §. 43. quo omnes quibus ingenium à natura datum fuit felix ad machinas excogitandas; excitari deberent, ad rei iſtius perfectionem tentandam.

Quarto. Quod nonnulla alia compendia purè mechanica adhiberi poſſint ſimilia illi quod §. 27. datum fuit, quorum nempe ope ab eodem labore effectus in promovendis navibus non parum creſcit; Verum non licet jam ſecundum veram rei indolem omnia pertractare.

EXPERIMENTA

In Sectionem decimam tertiam.

UT vim repellentem experimento recte cognoſcere liceat, adhiberi poterit vas quod habeat formam parallelopipedi ejuſque pondus ſumi tam vacui quam aqua pleni, poſteaque indagari ratio inter amplitudinem vaſis & amplitudinem foraminis, quod in latere vaſis eſſe debet, ſicut & ratio inter altitudines aquæ ſupra foramen & ſupra baſin: Inde deducere licebit rationem inter pondus vaſis aqua pleni & cylindri aquei foramini verticaliter ſuperincumbentis. Porro ex obſervata amplitudine jactus habebitur velocitas aquæ: ex hac, ſi ſimul jungas quantitatem aquæ dato tempore effluentem pariter obſervandam, colliges amplitudinem venæ contractæ, quam comparare poteris cum amplitudine orificii.

His omnibus exploratis ſuſpendatur vas ex filo prælongo adhibita ſimul cura, ut alium motum habere non poſſit, quam qui ſit directioni aquarum effluentium contrarius. Tum demum aquis effluxus concedatur & obſervabitur filum ſitum verticalem deſerere & ex angulo declinationis cognoſcetur vis repellens eaque cum menſuris, quas indicavimus, comparari poterit.

Expe-

Experimentum 1.

Feci ipſe aliquando omnia, ut nunc monui, viſumque fuit regulam noſtram §. 2. recte confirmari: non potui tamen tum temporis ſufficiente accuratione experimentum inſtituere, nec illud poſtea repetii.

Experimentum 2.

Alio tempore rem aliter tentavi: vas nempe de quo omnes menſuras requiſitas ſumſeram aqua plenum naviculæ impoſui in puppi: navicula aquis in alveo innatabat: Deinde aquis ex vaſe effluentibus (ita tamen ut in naviculam non illiderent) navicula in plagam contrariam progreſſa eſt: velocitatem naviculæ ex ſpatio dato tempore percurſo rectiſſime exploravi. Deinde inquiſivi quantum ponduſculum naviculæ eſſet appendendum, ut illo pondere ſollicitata eandem velocitatem acquireret. Inſtituta deinde comparatione iſtius ponderis cum pondere cylindri aquei datæ diametri, inde rectiſſime theoriam noſtram confirmari vidi.

Experimentum 3.

Effluentibus aquis ex vaſe naviculæ ſuperimpoſito in naviculam, hæc omnino immota permanſit: Id indicat impetum venæ aqueæ æqualem eſſe vi repellenti, ut demonſtravi §. §. 16. & 17. Tum etiam ſi vena aquea directe impingebat in planum naviculæ affixum, hæc ſimiliter immota ſtetit, quod rurſus æqualitatem impetus & vis repellentis probat: at ſi vena oblique in planum incidebat, navicula quidem motum obtinuit ſed lentiorem.

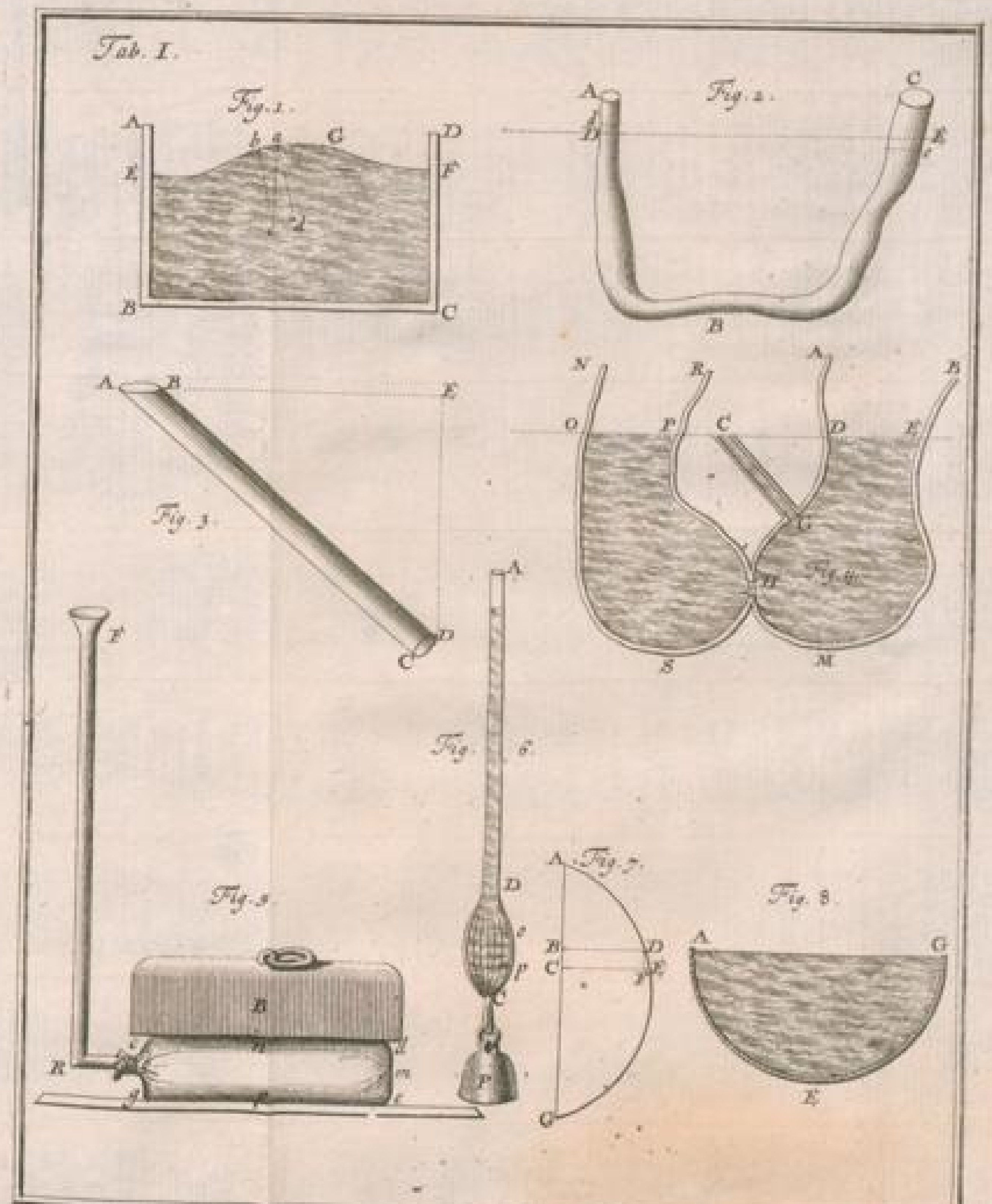
Denique ſi aquæ effluentes à navicula excipiebantur, ita ut orificium aquis in navicula ſtagnantibus eſſet ſubmerſum, ſimiliter abſque motu perſtetit navicula, documento, quod eadem preſſio à vena oriatur, ſive fiat ut omnis ejus motus cohibeatur, ſive ut ad angulum rectum declinetur, prouti demonſtratum fuit §. 18. æqualitatem inter vim repellentem & vim venæ aqueæ perpendiculariter in planum incidentis plurimis aliis modis exactiſſime confirmavi. Hanc autem vim theoriæ noſtræ conformem opinionique omnibus adhuc com-

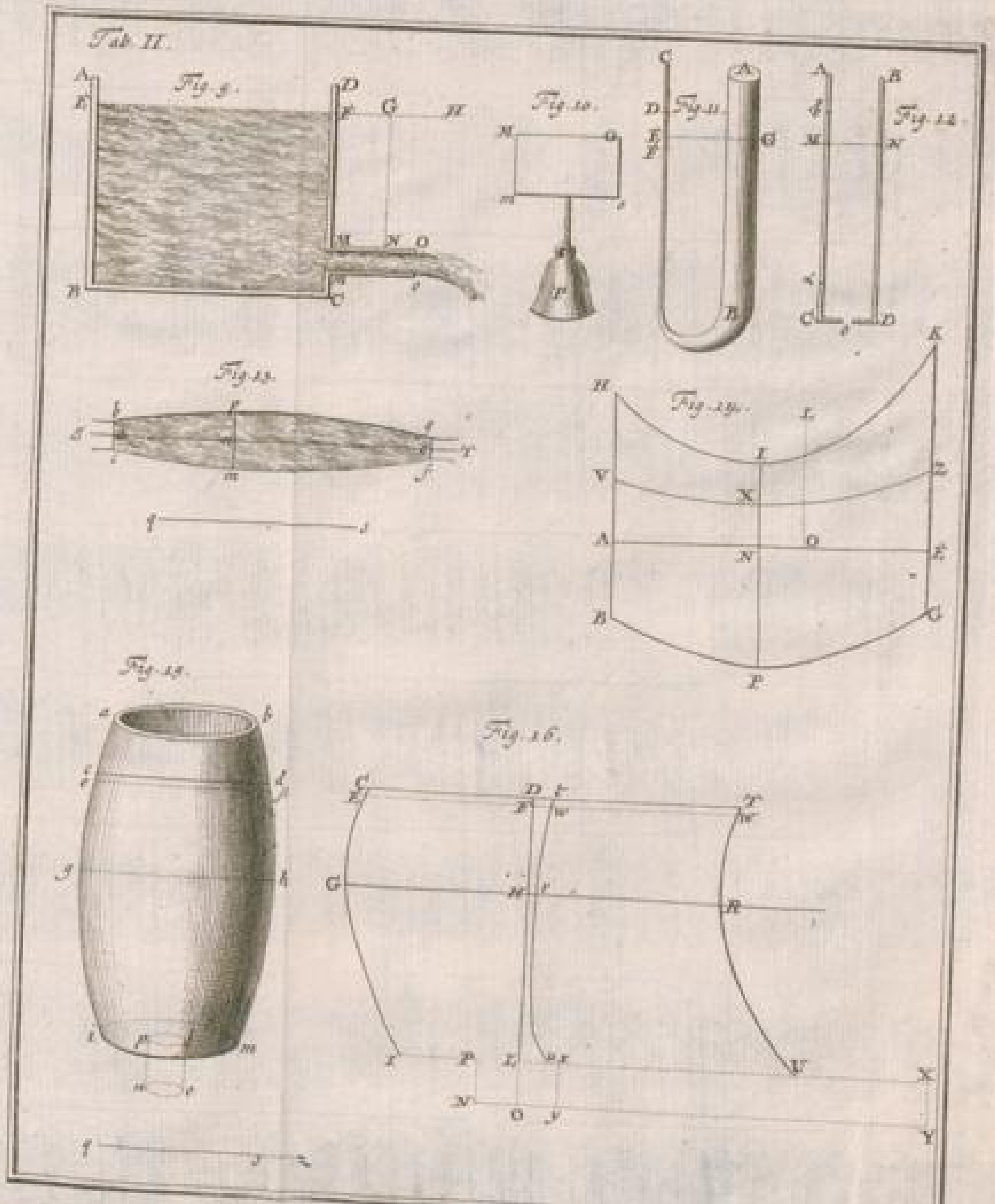
communi contrariam experimento omni exceptione majori confirmavi, quod præſentibus D. Emanuele Kœnig, Patrueli meo Nicolao Bernoullio atque Patre meo in ædibus meis inſtitui tanta cum fiducia, ut acceptis omnibus menſuris, preſſionem venæ aqueæ, quanta futura eſſet, etſi nunquam antea à me capto experimento, omni præciſione prædixerim. Hæc omnia novis principiis mechanicis eruta communicavi cum Academia Scientiarum Petropolitana, cujus Commentariis aliquando inſerentur.

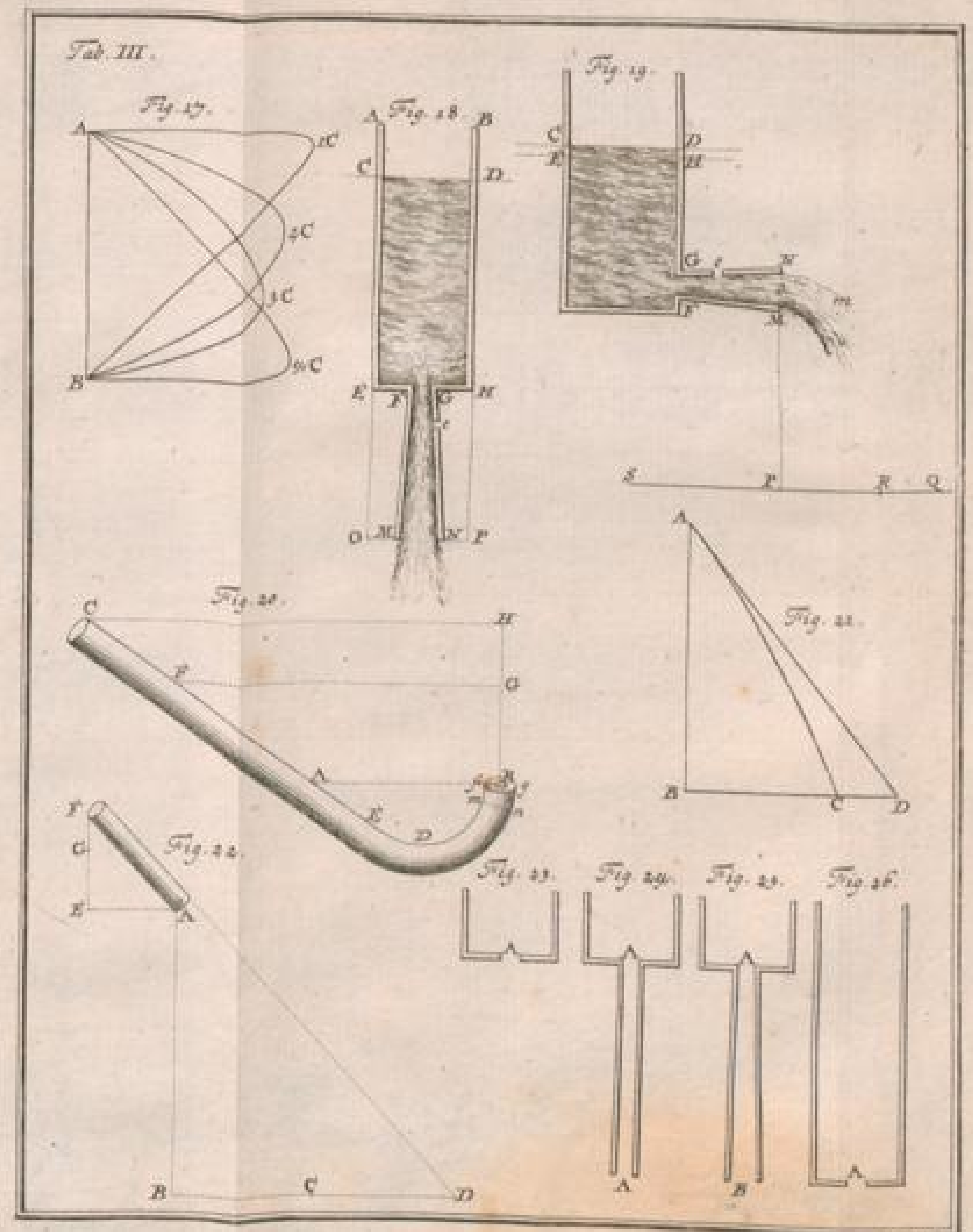
Experimentum 4.

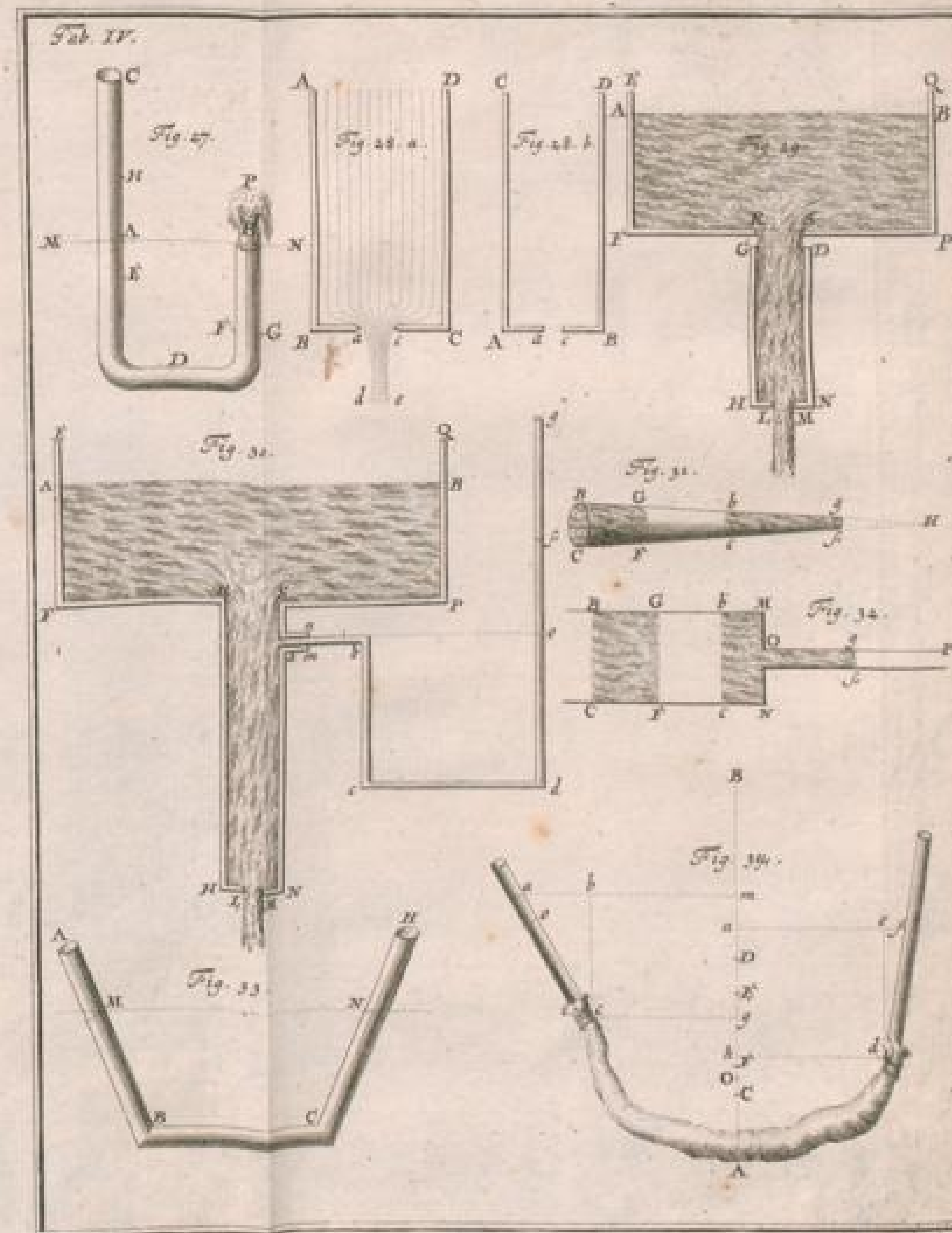
Ut etiam oſtenderem falſitatem regulæ receptæ tum de vi repellente
Fig. 86. tum de impetu aquarum, adhibui vas quale oſtendit Figura 86. inſtructum canali AB uniformis amplitudinis & incurvato, cujus directio in A erat horizontalis, in B verticalis: vidi vas plane non repelli horizontaliter; ergo per §. 14. falſa eſt regula, quæ ſimplici cylindro ibidem definito adhæret.

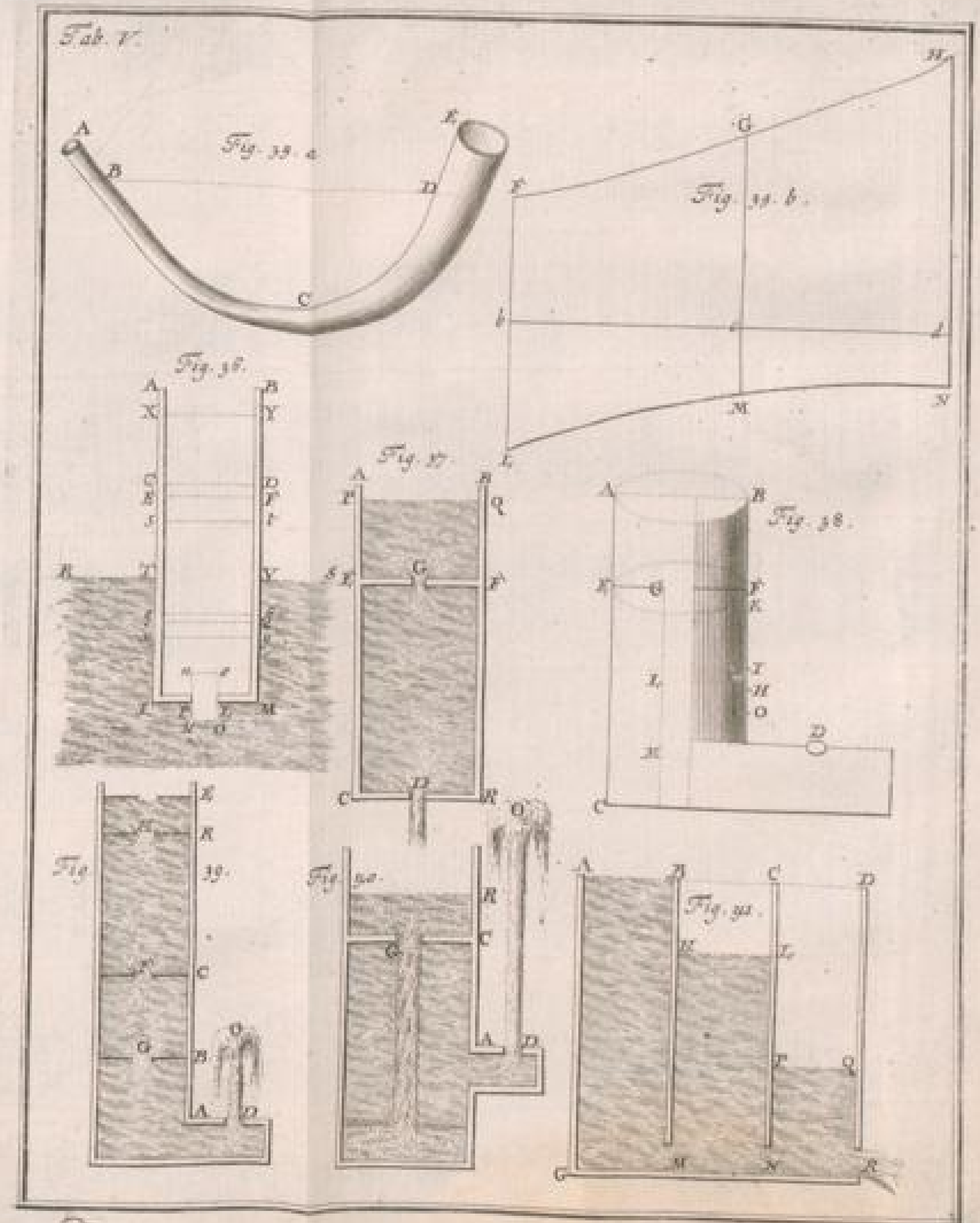
F I N I S.

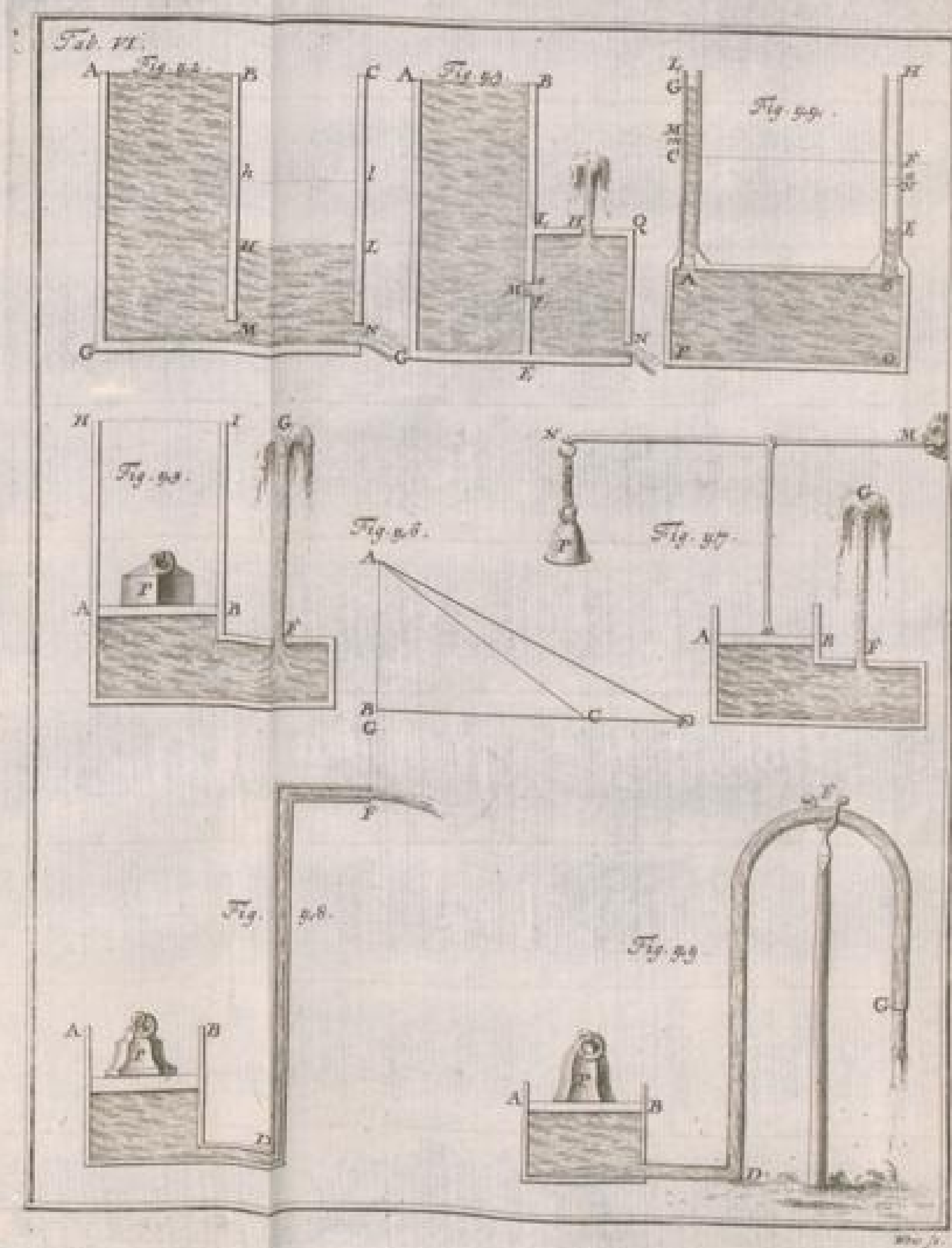

Tab. I.
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.

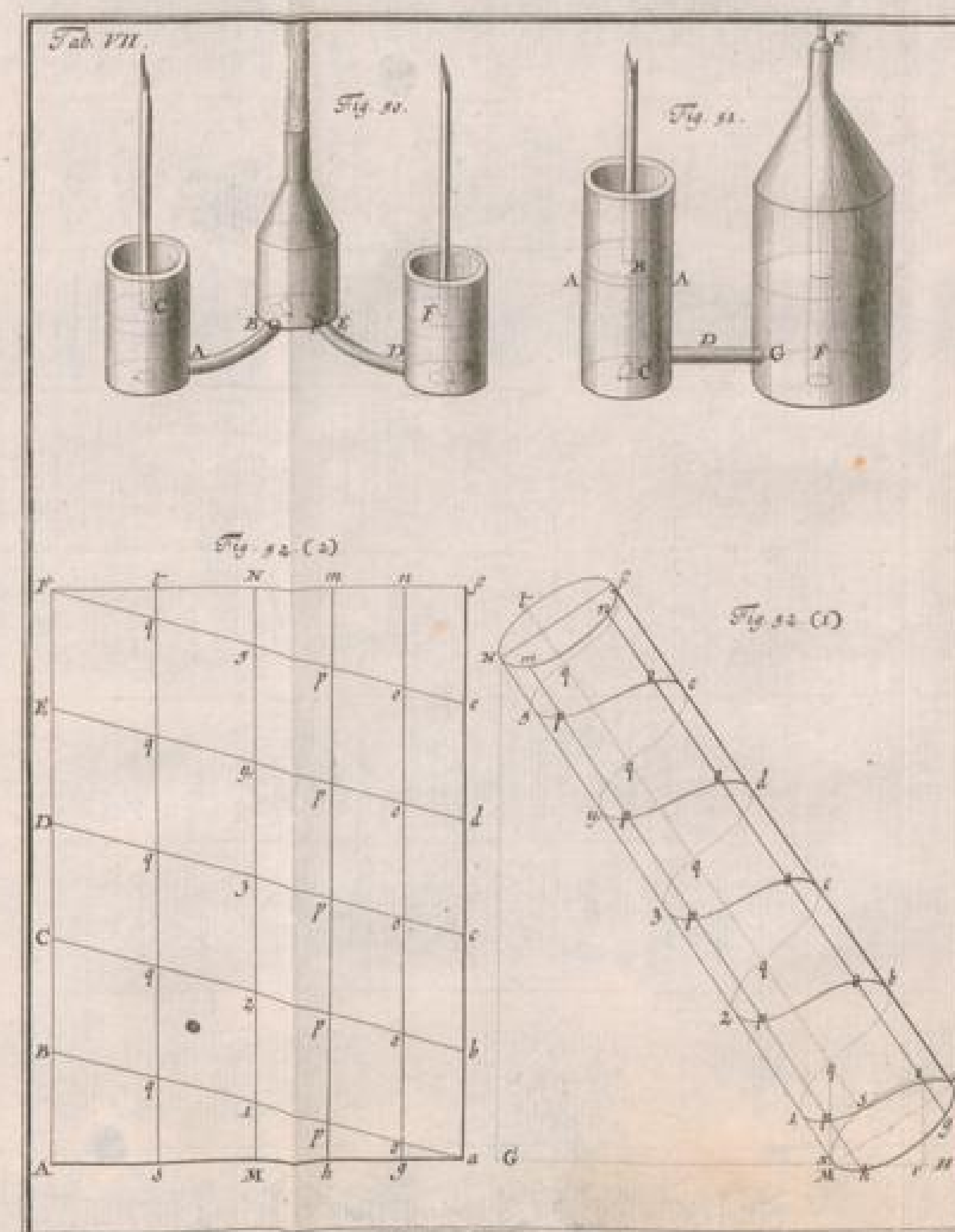

Tab. II.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.

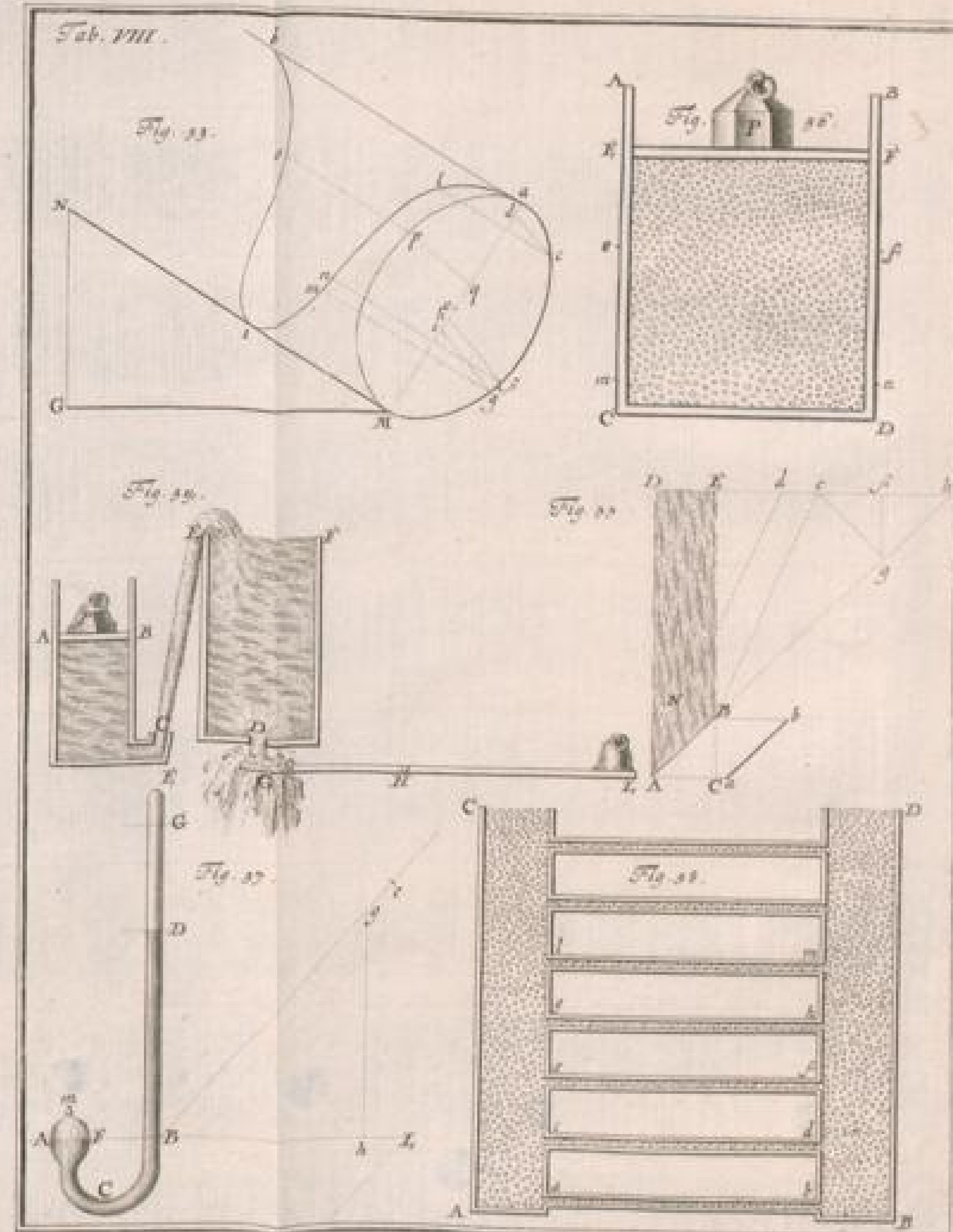

Tab. III.
Fig. 17.
Fig. 18
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.


Tab. IV.
Fig. 27.
Fig. 28. a.
Fig. 28. b.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 33.
Fig. 34.

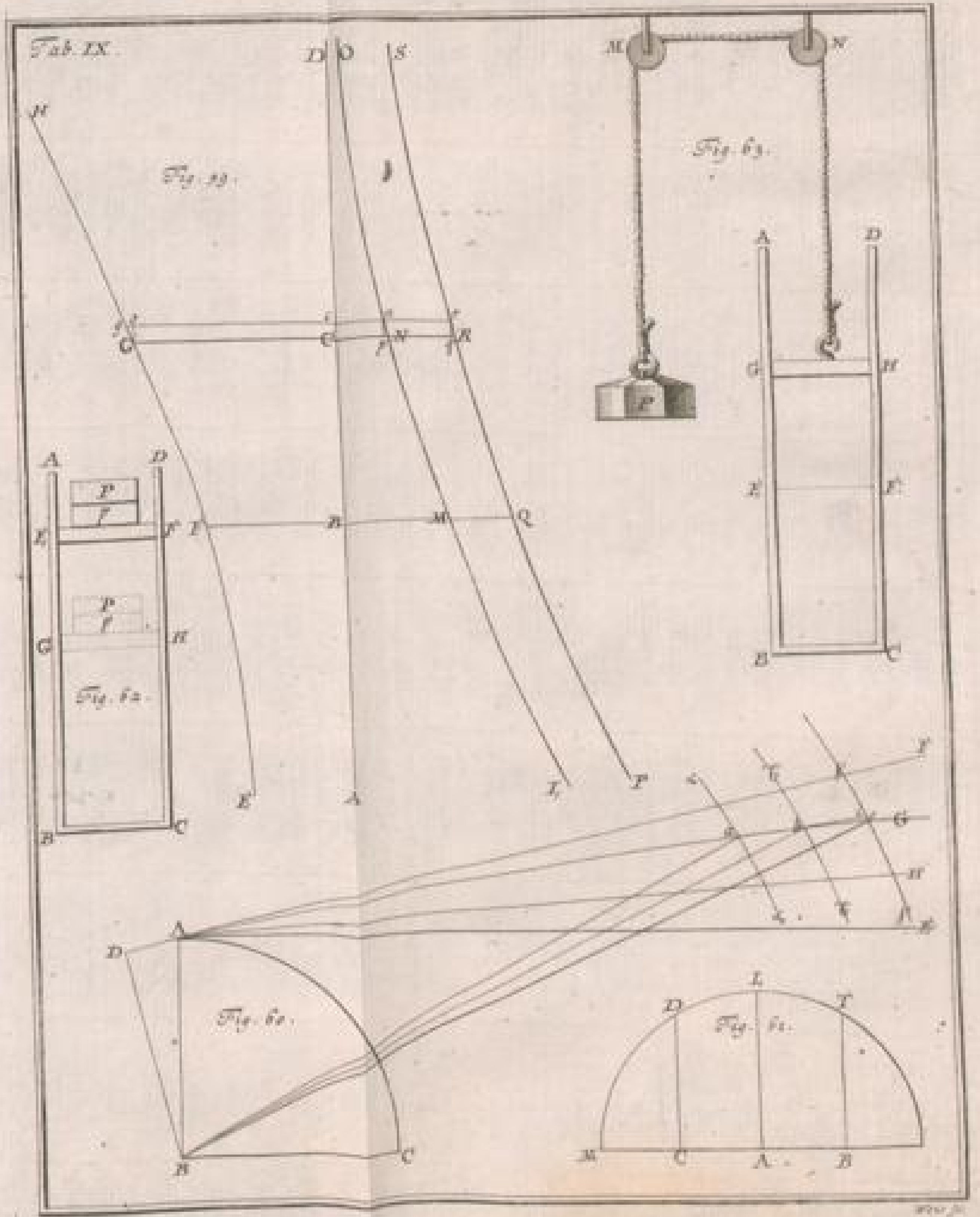

Tab. V.
Fig. 33. a
Fig. 33. b
Fig. 36.
Fig. 37.
Fig. 38.
Fig. 39.
Fig. 40.
Fig. 41.

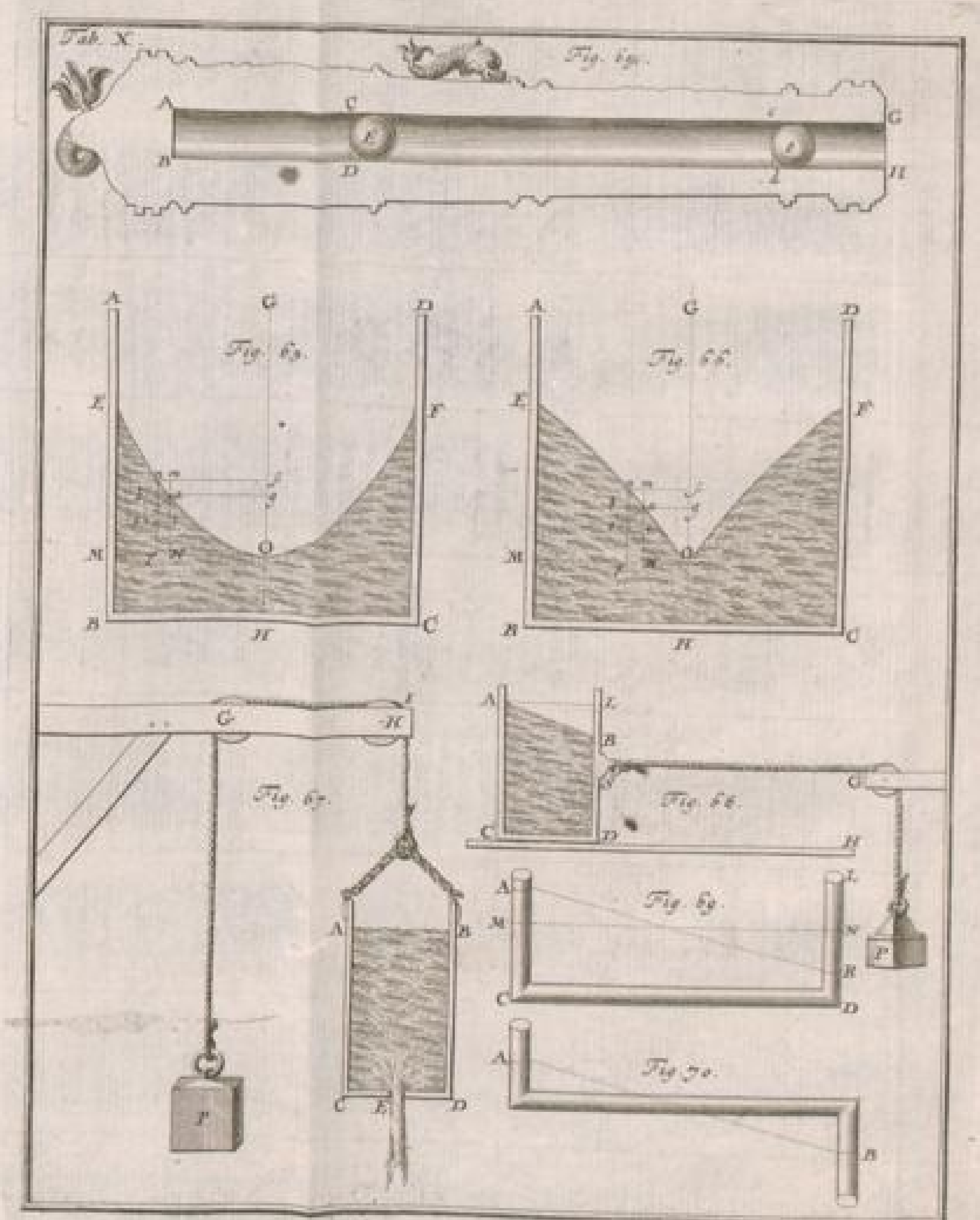

Tab. VI.

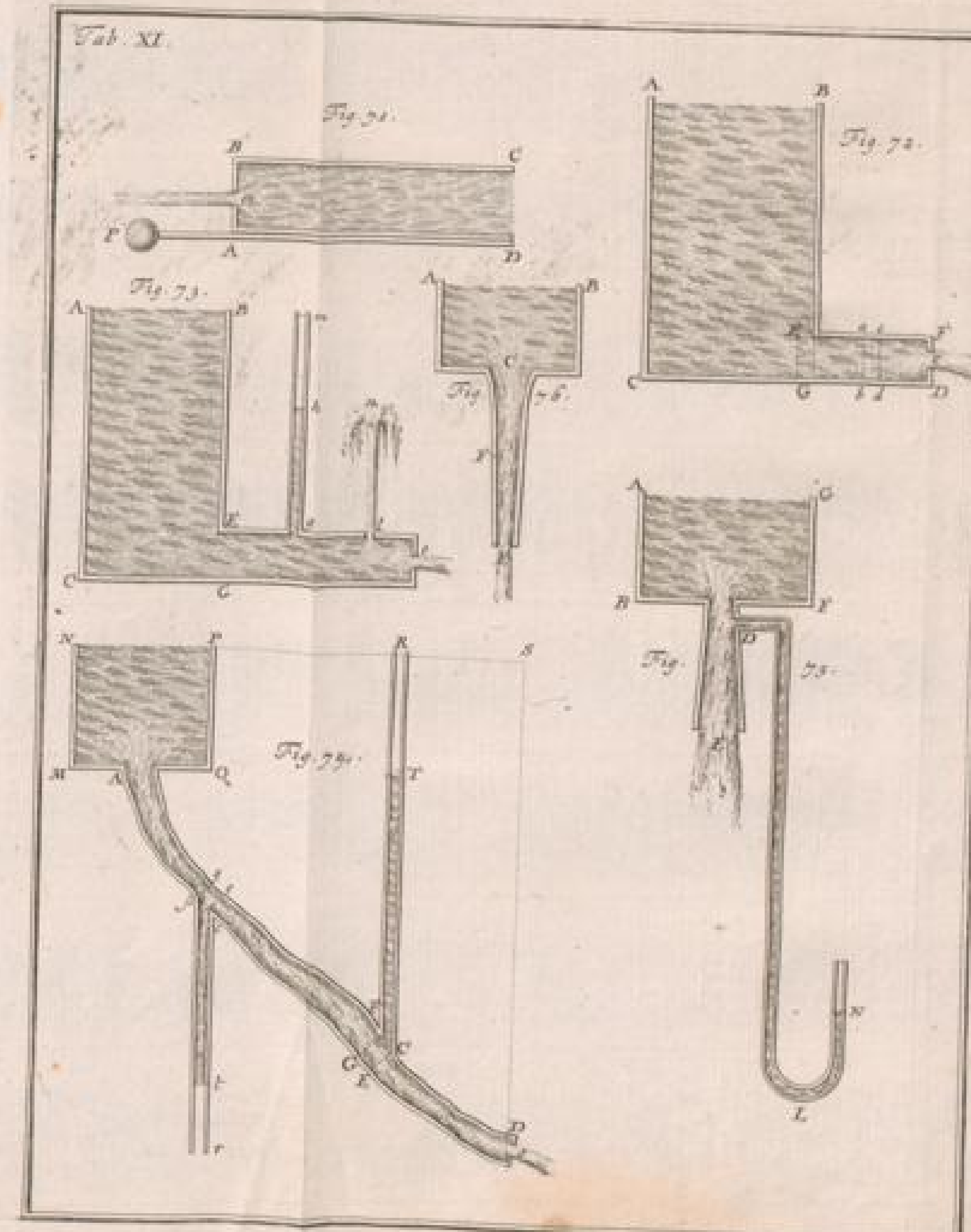

Tab. VII.
Fig. 91.
Fig. 92.
Fig. 94 (2)
Fig. 94 (1)

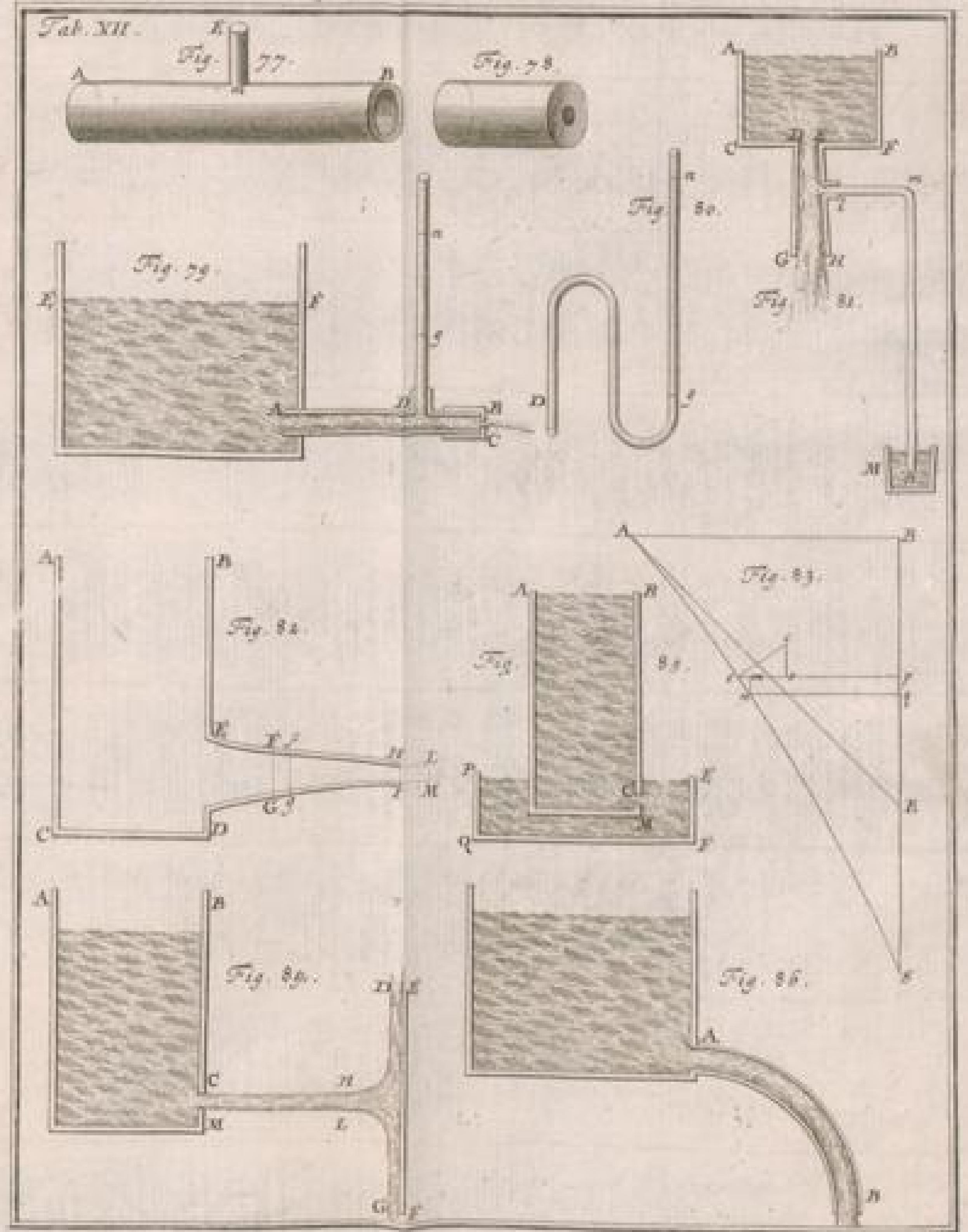

Tab. VIII.
Fig. 33.
Fig. 36.
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 37.
Fig. 38.

Tab. IX.




Tab. X.
Fig. 64.
Fig. 65.
Fig. 66.
Fig. 67.
Fig. 68.
Fig. 69.
Fig. 70.


Tab. XI.
Fig. 71.
Fig. 72.
Fig. 73.
Fig. 76.
Fig. 75.
Fig. 74.


Tab. XII.
Fig. 77.
Fig. 78.
Fig. 79.
Fig. 80.
Fig. 81.
Fig. 82.
Fig. 83.
Fig. 84.
Fig. 85.
Fig. 86.